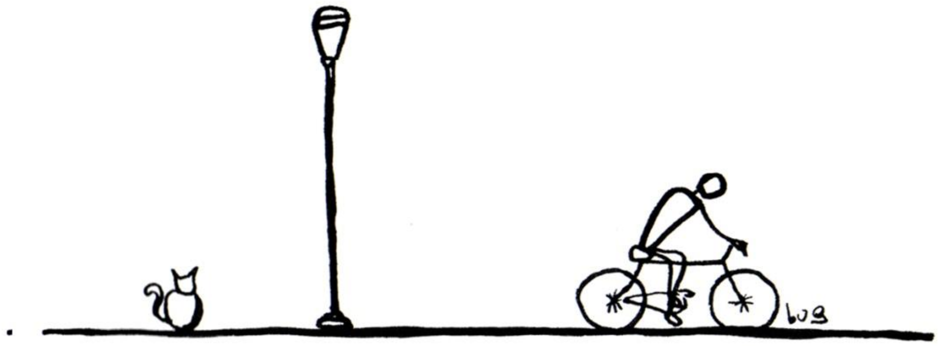


TERNE PITAGORICHE, NUMERO D'ORO E SUCCESSIONE DI FIBONACCI

Bruno Jannamorelli

Riassunto Dopo una breve storia del teorema di Pitagora e della sezione aurea, due gioielli della matematica classica, si mostra il loro concatenamento con la successione di Fibonacci. È un modo per fondere argomenti di geometria e di aritmetica, osservandoli sempre nel mondo reale e utilizzando la storia per facilitare l'apprendimento della matematica.

Abstract After a brief story of the Pythagorean theorem and the golden section, two jewels of classical mathematics, connections with the Fibonacci sequence are shown. This is a way to merge topics of geometry and arithmetic, always observing the real world and using history to facilitate the learning of mathematics.

Bruno Jannamorelli jannab@tiscali.it
Dip. di Scienze Umane, Fac. di Scienze della Formazione Primaria, Univ. L'Aquila

La geometria ha due grandi tesori:
uno è il teorema di Pitagora,
l’altro è il numero aureo.
Il primo possiamo paragonarlo a un lingotto d’oro,
il secondo possiamo considerarlo un gioiello prezioso.
G. Keplero

LE TERNE PITAGORICHE ... PRIMA DI PITAGORA

Una terna pitagorica è formata da tre numeri che rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo: la somma dei quadrati di due di essi (i cateti) è uguale al quadrato del terzo (l’ipotenusa). Il nome assegnato alla terna ricorda il famoso teorema di Pitagora (500 a.C.) , anche se una delle testimonianze più antiche dell’utilizzazione di questo teorema si trova su una tavoletta d’argilla, risalente all’antico impero babilonese della dinastia Hammurabi (1800 – 1600 a.C.). Attualmente è custodita all’Università di Yale negli Stati Uniti e appare come un ciottolo di circa 7,5 cm di diametro.

Fig. 1

Lo storico della matematica indiano George Gheverghese Joseph la definisce “un capolavoro babilonese” [4] e la disegna come in fig. 2.

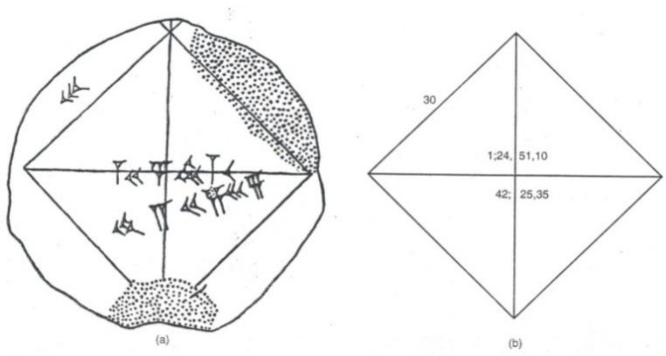


Fig.2

Nel disegno (a) si nota meglio il quadrato con le diagonali e tre numeri scritti con i caratteri cuneiformi. Nel disegno (b) gli stessi numeri sono scritti con i caratteri a noi più familiari.

- Il numero scritto sul lato del quadrato è 30 e rappresenta la lunghezza del lato.

- Il numero scritto al centro 1;24,51,10 (secondo la notazione di Neugebauer [10]) nella numerazione decimale è:

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\cong 1+0,4+0,01416667+0,0000463=1,41421297$$

Il confronto con $\sqrt{2}\cong 1,41421356$ porta a concludere che la stima dei babilonesi è corretta fino alla quinta cifra decimale: una straordinaria approssimazione di $\sqrt{2}$ utilizzata ancora da Tolomeo (150 d.C.) dopo quasi duemila anni.

- L'altro numero scritto al centro, al di sotto del precedente:

$$42;25,35=42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}$$

è ottenuto moltiplicando 1;24,51,10 per la lunghezza del lato del quadrato e rappresenta la lunghezza della diagonale:

$$(1;24,51,10)\cdot 30=\left(1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}\right)\cdot\frac{60}{2}=30+12+\frac{51}{2\cdot 60}+\frac{5}{60^2}=42+\frac{50+1}{2\cdot 60}\cdot\frac{60}{60}+\frac{5}{60^2}=$$

$$=42+\frac{50}{2\cdot 60}\cdot\frac{60}{60}+\frac{1}{2\cdot 60}\cdot\frac{60}{60}+\frac{5}{60^2}=42+\frac{25}{60}+\frac{30}{60^2}+\frac{5}{60^2}=42+\frac{25}{60}+\frac{35}{60^2}\quad .$$

Questa tavoletta è la prova che i Babilonesi conoscevano e utilizzavano il teorema di Pitagora più di mille anni prima del matematico greco a cui viene attribuito.

La conferma di ciò si trova in molte tavolette d’argilla che riportano problemi di geometria risolti dai babilonesi come, ad esempio, quello trascritto di seguito.

Esempio 1. (tavoletta BM 85196,9* classificata tra le più antiche).

Una trave (patu) di lunghezza 30 è appoggiato verticalmente contro una parete. Il suo estremo superiore si è spostato, verso il basso, di 6. Di quanto si è spostato l’estremo inferiore?

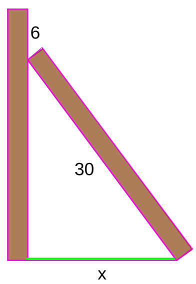


Fig. 3

La trave è l’ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha il cateto verticale lungo 30 – 6 = 24.

La lunghezza x del cateto orizzontale è lo spostamento dell’estremo inferiore della trave.

$$x = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324} = 18$$

Questo problema è interessante perché, con qualche variante, si ritrova in diverse civiltà e negli scritti di molti matematici: dagli indiani, ai cinesi, agli arabi fino a Fibonacci o a Luca Pacioli.

IL TEOREMA DI PITAGORA O DEL “KOU KU”

Il *Chou Pei*, la fonte più antica della matematica cinese risalente al 500-200 a.C., riporta una dimostrazione geometrica del teorema di Pitagora.

La traduzione fatta da Needham del testo che ci interessa è la seguente e fa riferimento alla fig. 4 :

Dividiamo un rettangolo (diagonalmente) e poniamo che la larghezza sia di 3 (unità) e la lunghezza di 4 (unità). La diagonale tra i due angoli risulterà quindi lunga 5 (unità). Ora, dopo aver disegnato un quadrato su questa diagonale, circoscriviamolo con mezzi rettangoli come quello che è rimasto fuori in modo da formare una tabella (quadrata). I "quattro" mezzi rettangoli esterni, che misurano 3 unità di larghezza, 4 di lunghezza e 5di diagonale, formano in tal modo insieme due rettangoli (di area 24); quindi (quando questa viene sottratta dalla tabella quadrata di area 49) il rimanente ha un'area di 25 unità. Questo (procedimento) viene chiamato "raggruppare i rettangoli"

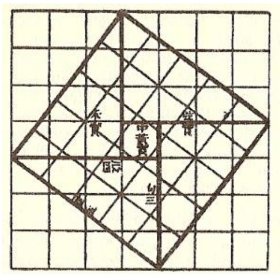


Fig. 4

Il quadrato *ABCD* ha come lato *3 + 4 = 7* e quindi ha area *49*. Se da questo quadrato vengono tagliati i quattrotriangoli *AEF*, *FBG*, *GHC*, *DHE* (che insieme formano due rettangoli di area *3 x 4 = 12*), il quadrato che rimane *EFGH* ha area *25*:

$$(3 + 4)^2 - 2(3 \times 4) = 3^2 + 4^2 + 24 - 24 = 5^2 \, .$$

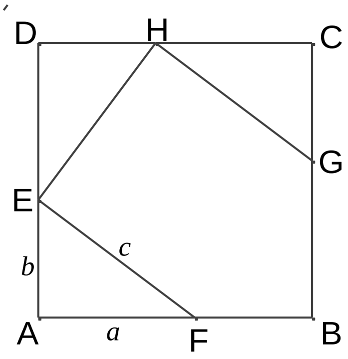


Fig. 5

Questa intuizione geometrica fu dimostrata nel III secolo d.C. da ChaoChung-Ching con il seguente enunciato:

Se il lato più corto (kou) e quello più lungo (ku*) di uno dei rettangoli sono rispettivamente* ***a*** *e* ***b*** *, e la sua diagonale (ksuan) è* ***c*** *, allora:*

$$c^2 = (a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 \ .$$

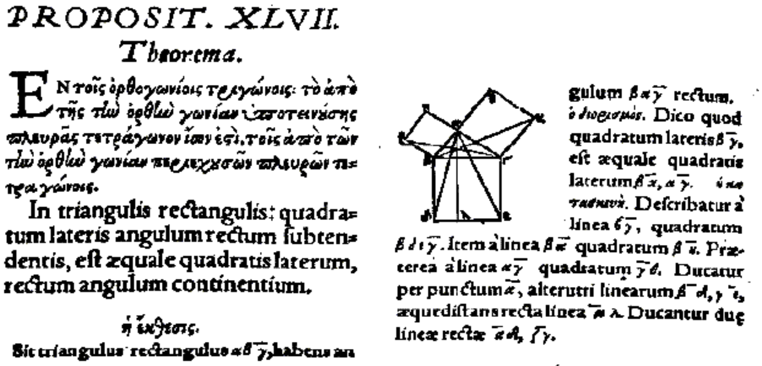
In questa forma il teorema era sicuramente conosciutodagli autori dei Sulbasutra (*500 a.C.* circa) dell’India Vedica.

LE TERNE PITAGORICHE NELLA GEOMETRIA GRECA

L’enunciato del teorema di Pitagora che si trova negli *Elementi* di Euclide [3] è il seguente:

Proposizione 47 *(Libro I, pag. 146)*

Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all’angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l’angolo retto.


PROPOSIT. XLVII.

Theorema.

ΕΝ τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

In triangulis rectangulis: quadratum lateris angulum rectum subtendentis, est æquale quadratis laterum, rectum angulum continentium.

ἡ ἔκθεσις.

Sit triangulus rectangulus αβγ, habens angulum βαγ rectum. ὁ διορισμός. Dico quod quadratum lateris βγ, est æquale quadratis laterum βα, αγ. ἡ κατασκευή. Describatur à linea βγ, quadratum βδεγ. Item à linea βα quadratum βη. Præterea à linea αγ quadratum γθ. Ducatur per punctum α, alterutri linearum βδ, γε, æquedistans recta linea αλ. Ducantur duę lineæ rectæ αδ, ζγ.

Fig. 6 La *Proposizione I, 47* in una edizione degli *Elementi* del 1556.

La terna pitagorica più famosa è certamente quella formata dai numeri 3, 4, 5 ($3^2+4^2=5^2$) e da questa se ne possono trovare infinite altre moltiplicando i tre numeri per uno stesso fattore: $3k, 4k, 5k$ con $k \in \Re$.

Molto probabilmente l’interesse che i seguaci di Pitagora nutrivano per i numeri figurati li portò a scoprire una formula generatrice di terne pitagoriche formate da numeri interi. Il numero quadrato n^2 veniva rappresentato da puntini disposti in n righe e n colonne. Per ottenere l’$(n+1)$-esimo numero quadrato bisogna aggiungere una riga di n punti in alto, una colonna di n punti a sinistra e un singolo punto a sinistra in alto: lo gnomone

2n + 1(per questo motivo i numeri dispari *2n + 1* furono chiamati *numeri gnomonici* a partire da Filolao, discepolo di Pitagora).

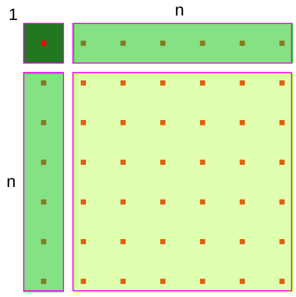


Fig. 7

Così il quadrato di $n+1$ si ottiene dal quadrato di n con l'aggiunta di $2n + 1$:

$$(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)\ . \qquad (1)$$

In questa formula, che è lo sviluppo del quadrato del binomio $n + 1$, compare una terna pitagorica se $2n + 1$ è un numero quadrato.

Se poniamo $2n + 1 = p^2$ si ha

$$n = \frac{p^2 - 1}{2} \qquad , \qquad n + 1 = \frac{p^2 - 1}{2} + 1 = \frac{p^2 + 1}{2}$$

e la (1) diventa

$$\left(\frac{p^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{p^2 - 1}{2}\right)^2 + p^2\ . \qquad (2)$$

Questa formula fu attribuita da Proclo ad Archita, il grande pitagorico di Taranto, e come si può facilmente verificare, la formula (2) fornisce terne pitagoriche intere se p è dispari mentre se p è pari vengono numeri frazionari.(*)

La stessa relazione si trova nel *Liber quadratorum* [2] (1225) di Leonardo Pisano, meglio conosciuto come Fibonacci:

Io ò chonsiderato sopra l'orrigine di tutti i numeri quadrati e ò trovato quella venire dalla ordinata asciensione de' numeri inpari. Inperò che unità è quadrata e di quella è fatta el primo quadrato, cioè a uno. Al quale agunto 3, fanno elsechondo quadrato, cioè 4, la cui radicie è 2; al quale quadrato se s'agugne al terzo numero inpari, cioè 5, si crieràel terzo numero quadrato, cioè 9, la cui radicie è 3. E chosìsenpre, per l'ordinata chonguntione de' numeri inpari ne proviene l'ordinatione de' numeri quadrati.

$$[1; 1+3=4; 1+3+5=9; 1+3+5+7=16; ...\ 1+3+\cdots+n=n^2]$$

Onde, quando vorremo trovare due numeri quadrati de' quali lo agugnimento faccia numero quadrato, torrò qual vorrò numero inpari quadrato, e quello arò per uno de' due detti quadrati; l'altro troverrò per lo agugnimento di tutti e' numeri inpari che sono da uno infino a quello numero quadrato inpari.

Exempligratia. Piglierò 9 per uno de' detti due quadrati; l'altro arò per lo agugnimento di tutti e'numeriinpari che sono disotto a 9, cioè del 1,3,5,7, de' quali la somma è 16, che è quadrato; el quale, aguntochon 9, fanno 25, che è quadrato.

UNA FORMULA DI PLATONE

Una formula successiva, attribuita da Proclo a Platone il quale l'aveva appresa molto probabilmente da Archita come ha scritto Severino Boezio (470 d.C. circa–526 d.C.), fornisce terne pitagoriche di numeri interi nella maniera seguente:

si prenda come lunghezza del primo cateto un qualunque numero pari a, l'altro cateto misura $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1$ e l'ipotenusa è $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$.

Se poniamo $a = 2p$, la formula può essere scritta:

$$\left(p^2 + 1\right)^2 = \left(p^2 - 1\right)^2 + \left(2p\right)^2 \quad . \tag{3}$$

Ecco come è stata riportata da Fibonacci nel *Liber quadratorum* [2]:

...Anchora altrimenti torròalchuno quadrato pari per lo cui mezo sia pari, chome è 36 del quale la metà è 18; e di quello leverò 1 e arò 17; e quello 1 agugnerò al 18 e aremo 19. E chosì 17 e 19 che sono inpari e chontinui, chon ciò sia chosa che niuno inpari sia in quel mezo, e della loro aguntione si cria 36 che è quadrato; e della aguntione di tutti gl'inpari che sono sotto a 17 si cria 64 che è quadrato. De' quali due quadrati, cioè 36 e 64, si fanno 100, che è quadrato e è fatto dello agugnimento de' numeri inpari da uno infino a 19.

(*) Per ulteriori approfondimenti si rimanda all'articolo di Mario Barra: Fusionismo fra algebra e geometria per dimostrare alcune proprietà delle terne pitagoriche e come occasione per un confronto fra i due linguaggi, ProgettoAlice, vol. XIII, n° 38, p. 207-220.

La (3) è ottenuta moltiplicando per 4 la (2) e pertanto fornisce le stesse terne. Ma ci sono terne pitagoriche non ottenibili da questa formula, come la terna 5, 12, 13 e per trovarle tutte bisogna aspettare una formula attribuita al matematico greco Diofanto (probabilmente vissuto tra il 150 e il 250 d.C.) riportata negli Elementi di Euclide.

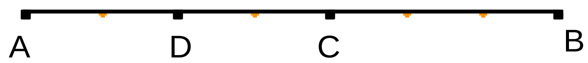
UNA FORMULA DI DIOFANTO

Nel lemma I che precede la Proposizione 29 (Libro X, Elementi [3] pag.663), Euclide fornisce una formula per generare terne pitagoriche intere.

Lemma I

Trovare due numeri quadrati tali che anche la loro somma sia un quadrato.

Nella dimostrazione Euclide considera due numeri interi, entrambi pari o entrambi dispari, che rappresentano le lunghezze di due segmenti *AB* e *CB*. Poiché è pari il numero che si ottiene sottraendo due numeri pari o due numeri dispari, la differenza *AC*= *AB* – *CB* è un numero pari.



Si divida *AC* a metà in *D*.

Se *AB* , *CB* sono due numeri quadrati, allora Euclide utilizza il problema di applicazione delle aree per difetto (Proposizione 6, Libro II, *Elementi* [3], pag.170) e scrive la relazione

$$\overline{AB}\cdot\overline{CB}+\overline{DC}^{2}=\overline{DB}^{2} \qquad (4)$$

Ma $\overline{AB}\cdot\overline{CB}$ è un numero quadrato (Proposizione I, Libro IX, Elementi [3] pag.525) e pertanto si sono trovati due numeri quadrati $\overline{AB}\cdot\overline{CB}$ e $\overline{DC}^{2}$ la cui somma è il numero quadrato $\overline{DB}^{2}$.

Utilizzando la notazione algebrica a noi più familiare, indichiamo le lunghezze dei segmenti *AB* , *CB* con due numeri interi p , q da cui $\overline{AC}=p-q$, $\overline{AD}=\overline{DC}=\frac{p-q}{2}$ e $\overline{BD}=\frac{p-q}{2}+q=\frac{p+q}{2}$.

La relazione di Euclide (4) viene scritta:

$$p \cdot q + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 \quad . \tag{5}$$

Per risolvere il problema di trovare due numeri quadrati tali che la loro somma sia un numero quadrato, basta che il prodotto $p \cdot q$ sia un numero quadrato.

Applicando la Proposizione 1, Libro IX, *Elementi* [3], pag. 525, Euclide conclude che basta scegliere p , q in modo che siano due *numeri piani simili*, cioè tali che si possano scomporre in coppie di fattori proporzionali

($p = a \cdot b$ e $q = ka \cdot kb$ da cui $p \cdot q = a \cdot b \cdot ka \cdot kb = k^2 \cdot a^2 \cdot b^2$) .

In particolare se p e q sono numeri quadrati, $p = h^2$ e $q = m^2$ la (5) si riscrive:

$$h^2 m^2 + \left(\frac{h^2 - m^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{h^2 + m^2}{2}\right)^2 \tag{6}$$

oppure, moltiplicando per 4,

$$4h^2 m^2 + \left(h^2 - m^2\right)^2 = \left(h^2 + m^2\right)^2$$

e pertanto una qualunque terna pitagorica formata da numeri interi è data da

$$2hm \ , \ h^2 - m^2 \ , \ h^2 + m^2$$

con h , m numeri interi qualsiasi ($h > m$).

LA SEZIONE AUREA E IL NUMERO D'ORO

a. le origini della sezione aurea nella geometria greca

Per illustrare le origini dell'Universo, Platone ricorre ad un dialogo tra Socrate e Timeo, un pitagorico di Locri, nell'opera che porta il nome di quest'ultimo.

"Ciò che è generato deve necessariamente essere materiale, visibile e tale che possa toccarsi; e poiché nulla può essere visibile se è separato dal fuoco, e nulla può toccarsi senza qualcosa di solido, e non può esservi solido senza la terra, perciò Dio cominciò a costruire

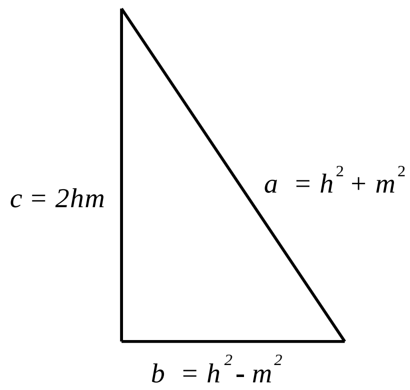


Fig. 8

Anche questa formula è stata riportata da Fibonacci nel *Liber quadratorum* [2]:

E gli è anchora un altro modo a trovare due numeri quadrati che 'l loro chongunto faccia numero quadrato, che nel 10 d'Euclide è manifesto. [Elementi di Euclide, libro X]

... E ne' numeri sia ab *25 e* bg *sia 9; sarà* ag *34 e il* ad *17. Adunque il quadrato di* ad *fia 289, che è igual al quadrato del* db *e al quadrato fatto del* ab *in*bg, cioè a 225.

Fibonacci considera due numeri quadrati dispari che rappresentano, come per Euclide, le lunghezze di due segmenti $\overline{AB} = 25$ e $\overline{BG} = 9$. La loro somma è la lunghezza del segmento $\overline{AG} = \overline{AB} + \overline{BG} = 25 + 9 = 34$ e la metà di questa è $\overline{AD} = 17$.

Alla stessa formula si perviene ragionando in altro modo:
una terna pitagorica formata da numeri interi a , b , c tali che $a^2 - b^2 = c^2$ può essere determinata ponendo $a = x + y$, $b = x - y$, con x , y interi e $x > y$.

Infatti, in tal caso, si ha:

$$a^2 - b^2 = (x+y)^2 - (x-y)^2 = [(x+y)+(x-y)][(x+y)-(x-y)] = \\ = (2x)(2y) = 4xy = c^2 ,$$

da cui si ricava $c = 2\sqrt{xy}$ che è un numero intero se $x = h^2$, $y = m^2$.

Pertanto, una terna pitagorica è formata da numeri interi a , b , c se:

$a = h^2 + m^2$, $b = h^2 - m^2$, $c = 2hm$ con h, m interi positivi e h>*m*.

LA SEZIONE AUREA E IL NUMERO D’ORO

a. Le origini della sezione aurea nella geometria greca

Per illustrare le origini dell’Universo, Platone ricorre ad un dialogo tra Socrate e Timeo, un pitagorico di Locri, nell’opera che porta il nome di quest’ultimo.

“Ciò che è generato deve necessariamente essere materiale, visibile e tale che possa toccarsi; e poiché nulla può essere visibile se è separato dal fuoco, e nulla può toccarsi senza qualcosa di solido, e non può esservi solido senza la terra, perciò Dio cominciò a costruire il corpo del Tutto partendo dal fuoco e dalla terra.
Ma non è possibile che due cose stiano bene insieme senza una terza: bisogna che in mezzo alle due vi sia un legame che li riunisca insieme.

Fra i legami il più bello è quello che fa, per quanto è possibile, un’unica cosa di sé e dei termini legati insieme; ed è la proporzione che realizza ciò nel modo migliore. Perché quando di tre numeri o pesi o potenzequalunque, il medio sta all’ultimo come il primo sta al medio e, inversamente, il medio sta al primo come l’ultimo sta al medio, allora il medio, divenendo primo e ultimo, e l’ultimo e il primo divenendo medi, necessariamente allora tutti i termini hanno la stessa funzione e, comportandosi allo stesso modo gli uni rispetto agli altri, formano realmente una unità.

Se, dunque, il corpo del Tutto fosse piano, senza profondità, una sola media basterebbe a legare insieme se stessa e le altre cose; ma poiché il corpo del Tutto doveva essere solido, e i solidi non vengon collegati da una media, ma sempre da due medie, perciò Dio ha posto l’aria e l’acqua nel mezzo, tra il fuoco e la terra, disponendo, per quanto possibile, l’un elemento rispetto all’altro nello stesso rapporto, sicché come il fuoco sta all’aria, così l’aria sta all’acqua, e come l’aria sta all’acqua, così l’acqua sta alla terra.”

È questa la doppia proporzione che tiene unito l’Universo:

fuoco : aria = aria : acqua = acqua : terra.

Il ragionamento di Platone ci rimanda al problema della duplicazione del quadrato, mirabilmente risolto dallo stesso Platone con un dialogo di Socrate nel *Menone*, o al problema della duplicazione del cubo ma ci porterebbe molto lontano.

Il *legame* di cui parla Timeo è la proporzione geometrica:

dati tre numeri a, b, c (rispettivamente il primo, il medio e l'ultimo) si ha

$$b : c = a : b \quad \text{oppure} \quad b : a = c : b$$

che possiamo scrivere

$$a : b = b : c \quad \text{oppure} \quad c : b = b : a$$

per affermare che b è medio proporzionale tra a e c.

Le proporzioni scritte portano a concludere che

$$b^2 = ac$$

e l'interpretazione geometrica di questa uguaglianza è la seguente:
un rettangolo di lati a e c è equivalente ad un quadrato di lato b.

b. La sezione aurea negli *Elementi*

Euclide,negli *Elementi* [3] [Libro VI, def. III, pag. 360], riporta la seguente definizione:

"Si dice che una retta [segmento] *risulta divisa in estrema e media ragione, quando tutta quanta la retta sta alla parte maggiore di essa come la parte maggiore sta a quella minore".*

E poi, sempre nel Libro VI [pag. 360], dimostra la seguente:

Proposizione 30

Dividere in estrema e media ragione una retta terminata data.

Nella dimostrazione di questa proposizione, Euclide fa uso delle proporzioni ma lo stesso risultato lo aveva dimostrato senza ricorrere alle proporzioni nella seguente:

Proposizione 11 *(Libro II, pag. 185)*

Dividere una retta [segmento] *data in modo che il rettangolo compreso da tutta la retta e da una delleparti* [rettangolo avente come dimensioni tutto il segmento e una delle due parti]*sia uguale* [equivalente] *al quadrato della parte rimanente.*

La costruzione di Euclide è la seguente:

1. Si disegni sul segmento AB il quadrato $ABDC$.
   Si divida AC a metà nel punto Ee si tracci il segmento BE.

2. Sul prolungamento del lato *CA* si riporti il segmento *EF* = *BE*.
   Su *AF* si costruisca il quadrato *AFGH*.
   Si prolunghi *GH* fino ad incontrare *CD* in *K*.

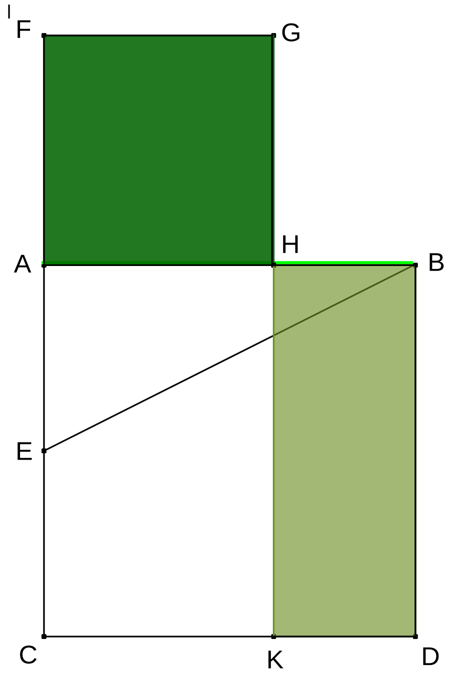


Fig. 9

Il segmento AB è stato diviso in due parti *AH* e *BH* tali che

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BD} \qquad \text{(ma } BD = AB\text{).}$$

Euclide dimostra questa uguaglianza utilizzando la *Proposizione 6* [libro II, pag.170] che è una applicazione per eccesso (iperbolica) delle aree.

Applicando la notazione algebrica che si impara a scuola oggi si ha:

Se indichiamo $\overline{AB} = 1$, $\overline{AH} = x$, $\overline{HB} = y$, con $x + y = 1$ allora l'uguaglianza

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{AB}$$

può essere scritta

$$x^2 = y(x + y)$$

cioè

$$x^2 - xy - y^2 = 0$$

da cui si ricava:

Dividendo per y^2	Dividendo per x^2
Si ha l'equazione: $\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 = 0$ la cui soluzione positiva è $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$	Si ha l'equazione: $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} - 1 = 0$ la cui soluzione positiva è $\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$

Il simbolo usato dai matematici per indicare il rapporto aureo era, fino alla fine del 1800, la lettera greca *tau* (τ), iniziale di *tomé* (taglio, sezione). È stato il matematico americano Mark Barr che ha introdotto, all'inizio del XX secolo il simbolo ϕ (*phi*), la lettera iniziale di Fidia, grande scultore e architetto greco vissuto tra il 490 e il 430 a.C.. Fidia ha utilizzato spesso il rapporto aureo nei suoi capolavori come ad esempio l'AthenaParthenos o lo Zeus del tempio di Olimpia ed è giusto ricordarlo tutte le volte che ci si imbatte in questo numero così armonioso.

Nel 1400, il matematico italiano fra' Luca Pacioli, aveva dedicato un libro alla "divisione di un segmento in estrema e media ragione" intitolandolo *"De Divina Proporzione"*.

Il termine "sezione aurea, invece, è molto più recente. Il primo ad usarlo sembra essere stato, nel 1835, il matematico tedesco Martin Ohm (fratello del più noto Georg Simon Ohm, che ha dato il nome a una legge fisica riguardante i circuiti elettrici).

c. Una costruzione recente della sezione aurea

Tra le varie costruzioni della sezione aurea riportiamo quella dell'austriaco Kurt Hofstetter [5]:

Dato un segmento AB, si disegnano la circonferenza di centro A avente raggio $\overline{AB}$ e quella di centro B con lo stesso raggio. La retta passante per A e B interseca queste due circonferenze nei punti E, F. Le circonferenze di centro A avente raggio $\overline{AD}$ e quella di centro B con lo stesso raggio si intersecano in due punti H, G.

I punti E, F, G, H si trovano sull’asse del segmento AB, i triangoli ABF e ABE sono equilateri e pertanto se $\overline{AB}=2$ allora $\overline{FM}=\overline{ME}=\sqrt{3}$, da cui $\overline{EF}=2\sqrt{3}$. Inoltre si ha: $\overline{MG}=\sqrt{\overline{AG}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$ e $\overline{GE}=\sqrt{15}+\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

In conclusione:

$$\frac{\overline{GE}}{\overline{EF}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi\,.$$

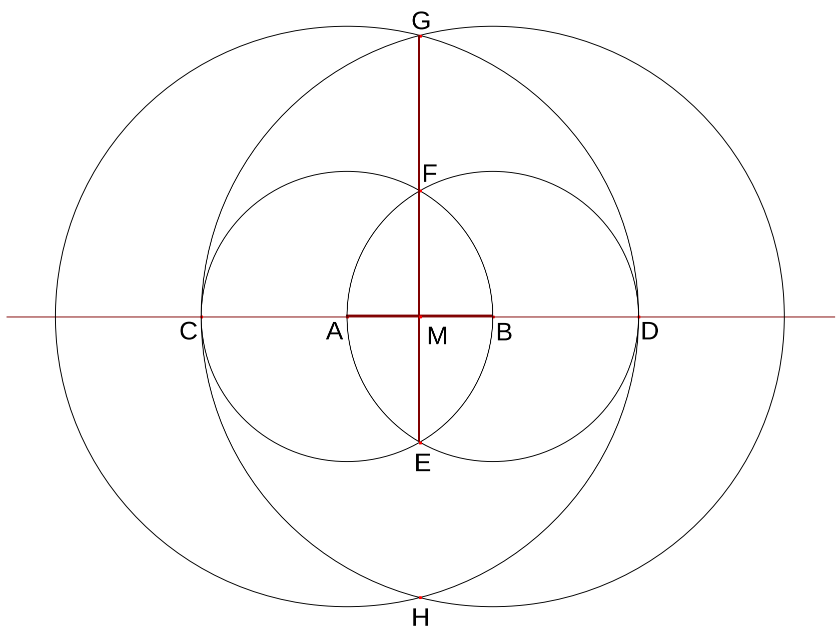


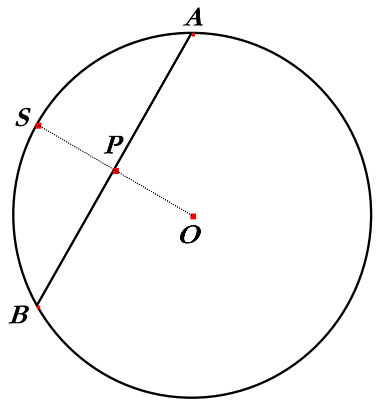
Fig. 10

d. La sezione aurea ottenuta con le piegature di un cerchio di carta

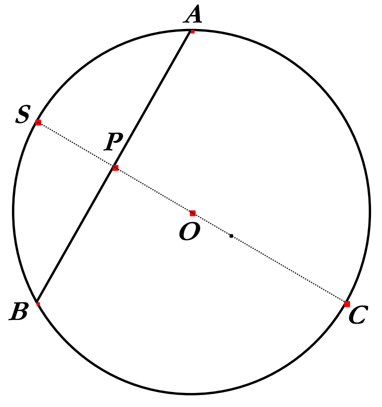
È necessario disporre di un cerchio di carta ottenuto con una fustella oppure ritagliato con le forbici dopo averlo disegnato sulla carta con un compasso. Il diametro ha una lunghezza che indichiamo 2r (indicativamente 10 o 12 centimetri).

Si eseguono alcune piegature del cerchio che elenchiamo in ordine:

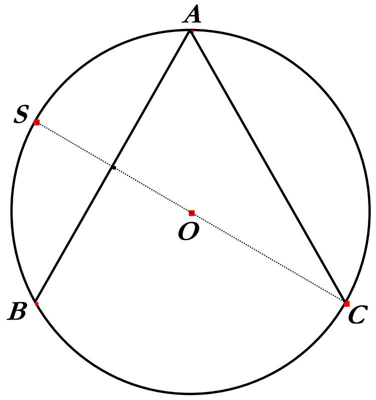
1. Si segna con una matita un punto S sulla circonferenza e si piega il cerchio in modo che tale punto si sovrapponga al centro O del cerchio. Se il centro non è segnato dalla punta del compasso , deve essere marcato piegando il cerchio lungo due diametri. Il raggio OS divide a metà la corda AB.



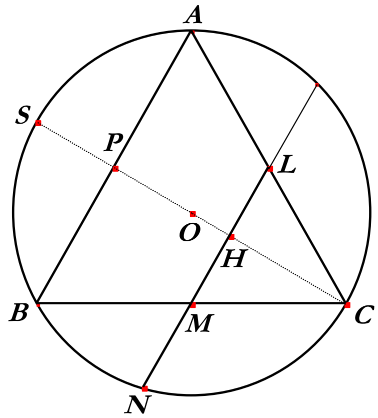
2. Si piega il cerchio in modo che A si sovrapponga a B e si trova il punto C sulla circonferenza, diametralmente opposto ad S.



3. Si piega il cerchio, prima lungo la corda AC e poi lungo la corda BC. Il triangolo ABC che si ottiene è equilatero e i suoi lati misurano $r\sqrt{3}$.



4. Si piega il cerchio in modo che il vertice C coincida con P. La piegatura individua i punti L, M sui lati del triangolo equilatero e il punto N sulla circonferenza.



Conclusione: MN è la sezione aurea interna del segmento LN, cioè $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{LM}} = \varphi$.

Infatti: $\overline{LC} = \overline{MC} = \overline{LM} = \dfrac{r}{2}\sqrt{3}$, $\overline{HM} = \dfrac{r}{4}\sqrt{3}$, $\overline{OM} = \overline{OL} = \dfrac{r}{2}$, $\overline{OH} = \dfrac{r}{4}$,

$$\overline{HN} = \sqrt{\overline{ON}^2 - \overline{OH}^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{16}} = \frac{r}{4}\sqrt{15},$$

$$\overline{MN} = \overline{HN} - \overline{HM} = \frac{r}{4}\sqrt{15} - \frac{r}{4}\sqrt{3} = \frac{r}{4}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

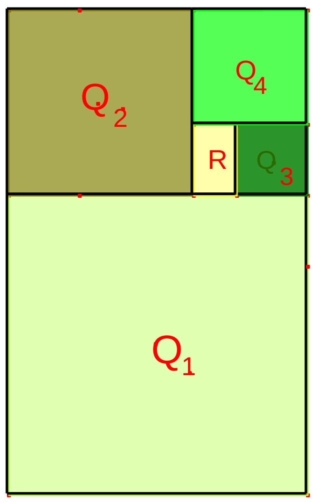
Pertanto si ha: $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{LM}} = \dfrac{r}{4}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\dfrac{2}{r\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$.

e. Il rettangolo aureo

La costruzione geometrica fatta da Euclide nella dimostrazione della Prop. 11 , riportata nella fig. 9, è tale che $\overline{CF} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ e quindi risulta $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$. Pertanto, se prolunghiamo FG e DB e indichiamo con M il loro punto d'intersezione, nel rettangolo che si ottiene DMFC si ha :

- Il rapporto tra il lato lungo e quello corto è ϕ.
- Il rapporto tra il lato corto e quello lungo è φ.

Un tale rettangolo è stato chiamato *aureo*.



A partire da un rettangolo aureo, sottraendo da questo un quadrato, si ottiene ancora un rettangolo aureo. Procedendo in tal modo più volte si ottengono tanti rettangoli aurei annidati in un grande rettangolo aureo.

Se a questo si aggiunge un quadrato, accostandolo al lato lungo, è possibile ottenere ancora un rettangolo aureo.

E così, chiudendo gli occhi, si può sognare di andare verso l’infinitamente piccolo, sottraendo quadrati, o verso l’infinitamente grande, aggiungendo quadrati.

f. La spirale aurea

Puntando il compasso su un vertice del quadrato più piccolo, con apertura uguale al lato di tale quadrato, si comincia a disegnare un quarto di circonferenza. A questa si raccorda un altro quarto di circonferenza più grande contenuta nel secondo quadrato e poi una terza contenuta nel terza quadrato e poi una quarta e così via.

La curva continua che si ottiene è la spira mirabilis di Jacques Bernoulli (1654 – 1705). È una curva che non cambia forma crescendo.

In natura la spirale aurea è stata utilizzata dal nautilo per modellare la sua conchiglia.

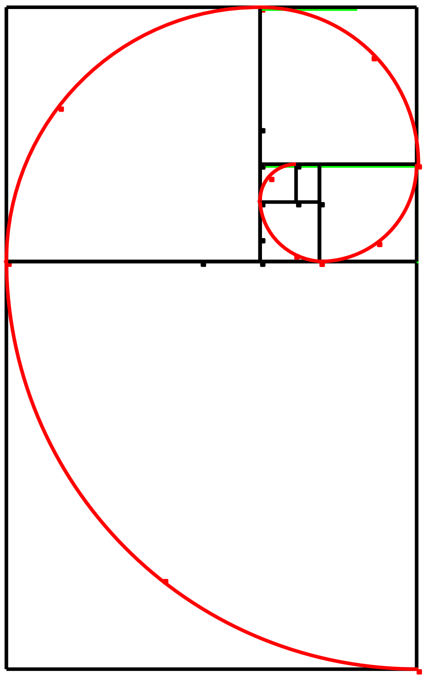


Fig. 11

g. La sezione aurea e il rettangolo aureo sul piano cartesiano

In un piano cartesiano *xy*, la parabola di equazione $y = x^2$ e la retta di equazione $y = x + 1$ si intersecano in due punti le cui ascisse sono $-\varphi$ (a sinistra dell'origine) e Φ (a destra dell'origine). I due rettangoli di dimensioni Φ e Φ^2, oppure φ e φ^2, sono rettangoli aurei.

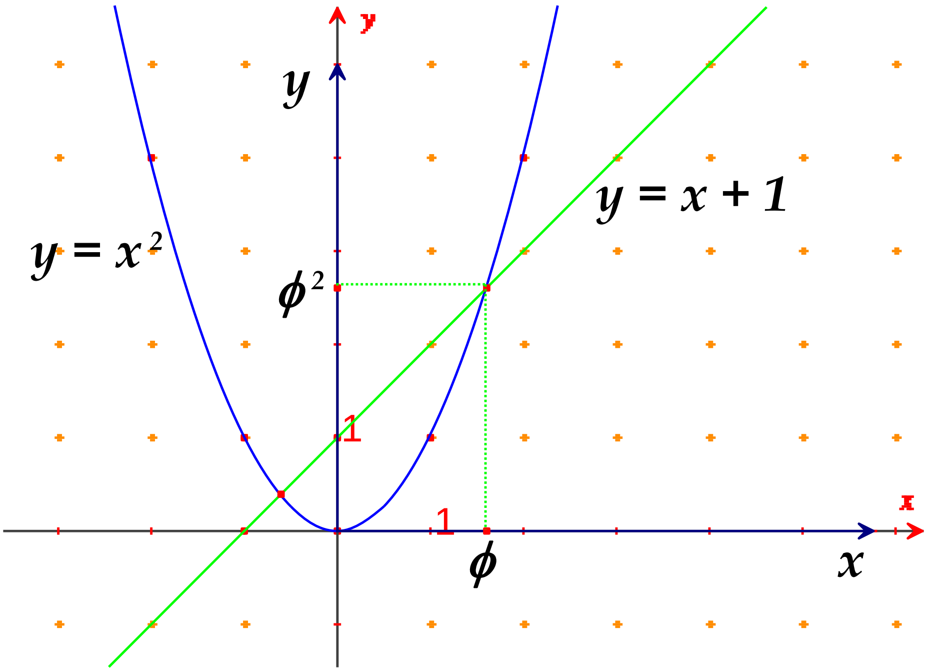


Fig. 12

DA UN PROBLEMA DI CONIGLI A UNA SUCCESSIONE MIRABILE

Leonardo Pisano (1170 – 1250), figlio di Bonaccio, meglio conosciuto come Fibonacci, è stato un grande matematico del Medioevo. Nel suo famoso *Liber abaci* (1202) tra gli altri problemi esposti ve n'era uno riguardante la legge di riproduzione di strani conigli che ha dato luogo ad una successione famosissima nella storia della matematica.

<table>
<tr><td>

Dal *Liber Abaci* di Fibonacci, 1202

Il seguente testo è estratto dalle pp. 283-284 degli *Scritti di Leonardo Pisano: mathematico del secolo decimoterzo*, pubblicati da Baldassarre Boncompagni, Roma, 1857.

</td><td>

Traduzione

</td></tr>
<tr><td>

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Qvidamposuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui eratundiqueparietecircundatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorumsit per singulummensemaliud par germinare; et in secundo mense ab eorumnatiuitategerminant.…

parium
1 primus
2 secundus
3 tercius
5 quartus
8 quintus
13 sestus
21 septimus
34 octauus
55 nonus
89 decimus
144 undeimus
233 duodecimus
377

</td><td>

Quante coppie di conigli discendono in un anno da una coppia.

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo completamente circondato da un muro, per scoprire quante coppie di conigli discendessero da questa in un anno: per natura le coppie di conigli generano ogni mese un'altra coppia e cominciano a procreare a partire dal secondo mese dalla nascita. ...

Puoi inoltre vedere in questo margine (vedi a sinistra) come abbiamo operato: abbiamo sommato il primo numero con il secondo, cioè 1 e 2; il secondo con il terzo, il terzo con il quarto, il quarto con il quinto e così via finché abbiamo sommato il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233 ed abbiamo ottenuto la somma dei suddetti conigli, cioè 377; e così si può fare per un numero infinito di mesi.

</td></tr>
</table>

Nel 1643, A. Gerard, il curatore dei lavori di Simon Stevin, fu il primo a scrivere la successione di Fibonacci nella forma standard:

$f_1 = 1\ ,\ f_2 = 1\ ,\ f_3 = 2\ ,\ f_4 = 3\ ,\ f_5 = 5\ ,\ \ldots\ ,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$.

LA SPIRALE DI FIBONACCI

A partire da un quadrato di lato 1, ne disegniamo un altro uguale su un suo lato. Otteniamo un rettangolo 2x1 e sul lato lungo di questo costruiamo un quadrato di lato 2. Sul lato lungo del rettangolo 3x2 disegniamo un quadrato di lato 3 e così via costruiamo quadrati di lati 5, 8, 13, 21, ...

Sono quadrati aventi come lati i numeri di Fibonacci. Tracciando in ogni quadrato un quarto di circonferenza, come in fig.13, si ottiene la *spirale di Fibonacci*. La sua somiglianza con la spirale aurea è impressionante.

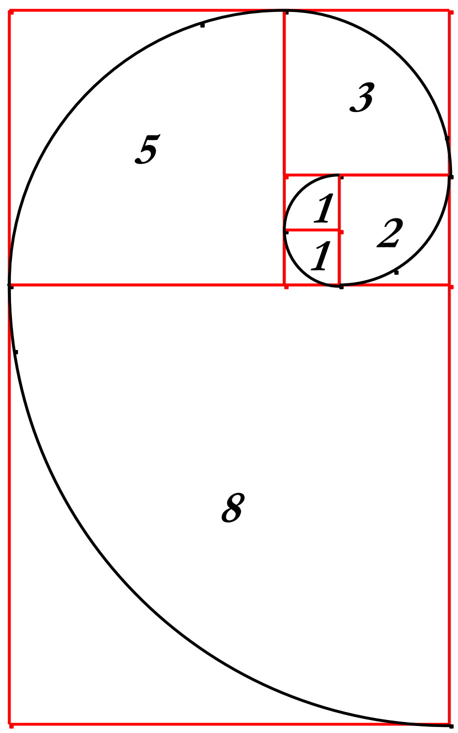


Fig.13

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI IN NATURA

❖ *L’albero genealogico del fuco*

Il fuco è il maschio delle api e nasce dalle uova, non fecondate, depositate dalle api operaie. Tra i suoi compiti vi è quello di fecondare le uova della regina e da queste nascono api operaie o regine. Il fuco ha un solo genitore (la madre), due nonni (i genitori della madre), tre bisnonni (i genitori della nonna e la madre del nonno), cinque trisnonni (due per ciascuna bisnonna e la madre del bisnonno) e così via.

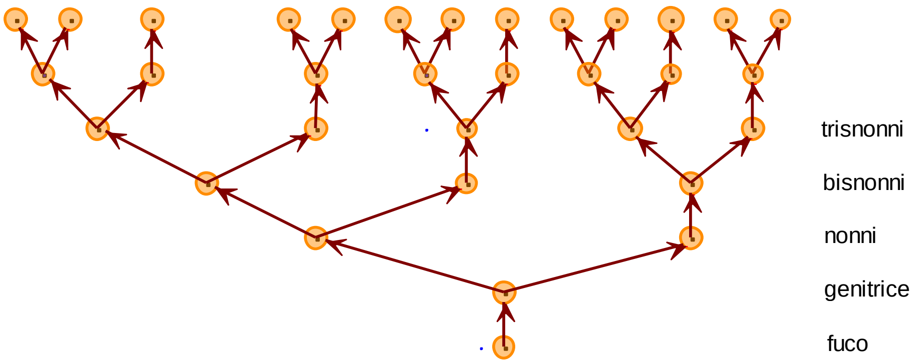


Fig. 14 Nell’albero genealogico del fuco si riconosce la successione di Fibonacci.

❖ *La Fillotassi*

I rami lungo il tronco di un albero o le foglie lungo il ramo tendono a disporsi in maniera tale da massimizzare l’esposizione alla luce e alla pioggia. Il naturalista svizzero Charles Bonnet (1720-1793) ha chiamato questo fenomeno naturale con il termine *fillotassi* (dal greco: disposizione delle foglie).

Osservando attentamente un ramo giovane di olmo o di tiglio si nota che, a partire da una foglia 0 (fig.15), avanzando verso l’apice del ramo, tracciando un’elica immaginaria, si compie un giro completo per trovare una foglia 2 nella stessa posizione e si incontrano due foglie: il rapporto di fillotassi dell’olmo è $\frac{1}{2}$. Possiamo anche dire che per passare da una foglia alla successiva si compie mezzo giro completo attorno al ramo.

Esistono altre piante, come il nocciolo o il faggio, che hanno un rapporto di fillotassi uguale a $\frac{1}{3}$: per passare da una foglia alla successiva, verso l'alto, si compie un terzo di angolo giro. Il melo, l'albicocco o il ciliegio(fig.15) hanno un rapporto di fillotassi uguale a $\frac{2}{5}$: per trovare due foglie disposte alla stessa maniera sul ramo si devono compiere due giri completi e si incontrano cinque foglie. Il salice piangente o il pero (fig.15) hanno un rapporto di fillotassi uguale a $\frac{3}{8}$.

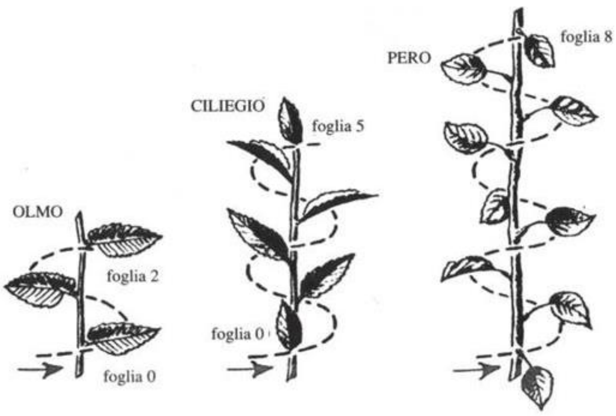


Fig.15

In tutti questi rapporti di fillotassi si riconoscono i termini della successione di Fibonacci alternati: primo e terzo, secondo e quarto, terzo e quinto, quarto e sesto. Non tutte le piante seguono questa legge matematica, infatti il matematico canadese Harold Coxeter (1907 - 2003) la chiamava *"una affascinante e prevalente tendenza"*, ma chi la conosce può osservare attentamente un ramo di foglie e verificarla. Anche questo è un modo per imparare ad osservare e a rispettare le piante.

La disposizione regolare delle foglie su un ramo era stata osservata nell'antichità da Teofasto (circa 372 - 287 a.C.) o da Plinio il Vecchio (23 – 79 a.C.). Un osservatore più attento fu Leonardo da Vinci (1452 – 1519) il quale notò che alcune foglie si disponevano a spirale sul ramo a cicli di cinque. Keplero (1571-1630) andò oltre e scoprì la connessione tra fillotassi e numeri di Fibonacci. Dopo gli studi di Bonnet, nel XIX secolo fu notata la presenza di questi numeri anche nelle disposizioni a spirale delle squame dell'ananas o delle pigne di pino.

❖ *Le squame dell’ananas e delle pigne*

Ognuna delle squame esagonali che rivestono il frutto dell’ananas appartiene a tre diverse spirali. Nella fig.16 è evidenziata una delle 8 file parallele che girano dolcemente attorno al frutto in verso antiorario, una delle 13 che girano più inclinate in verso orario e una delle 21 file che girano quasi verticalmente in verso antiorario. Nei frutti più piccoli i numeri delle disposizioni delle squame sono 5, 8 e 13: sempre una terna di numeri consecutivi di Fibonacci.

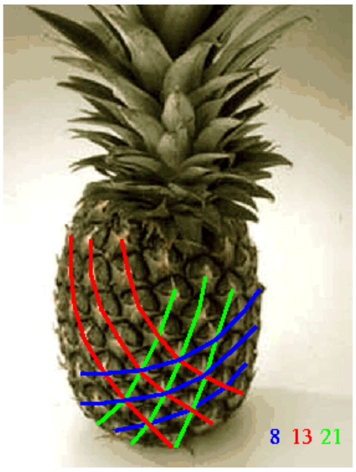


Fig.16

Una disposizione analoga la si trova nelle pigne di pino. Gli strobili dei pini presentano le squame (brattee) che coprono i semi disposte su due spirali che girano una in verso orario e l’altra in verso antiorario. Nelle pigne del pino domestico (*Pinus pinea*) ci sono 8 spirali in un verso e 13 nell’altro.

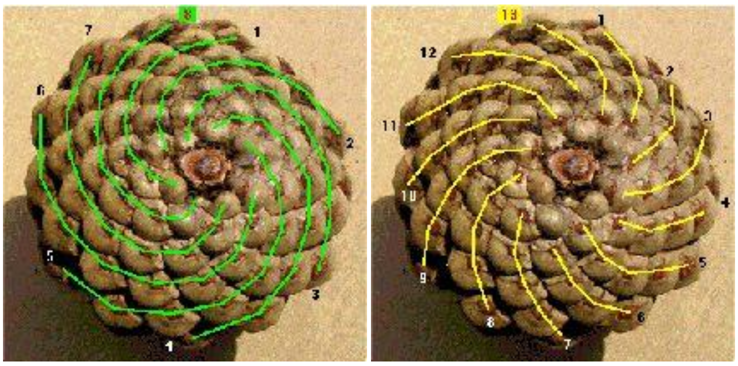


Fig.17

❖ *I semi di girasole*

Spirali che si avvolgono in verso orario o antiorario si trovano anche nella disposizione dei semi nel fiore di girasole. Il numero di tali spirali dipende dalle dimensioni del girasole. Più comunemente si trovano 34 spirali avvolte in un verso e 55 nel verso opposto, ma ci sono fiori più grandi con 89 e 55 spirali o anche 144 e 89. Sono sempre coppie di numeri consecutivi della successione di Fibonacci.

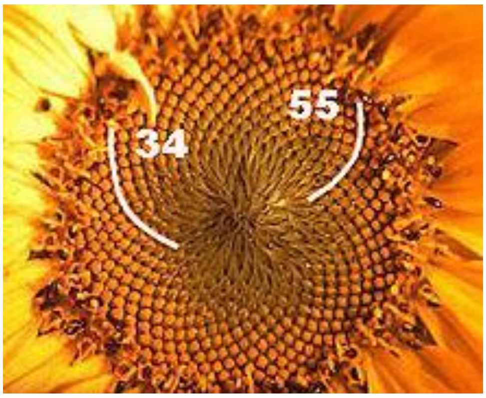


Fig.18

Nei fiori più grandi, la configurazione dei semi diventa spettacolare perché si possono ammirare file disposte a spirali passando da una coppia di numeri di Fibonacci consecutivi alla successiva (fig.19).

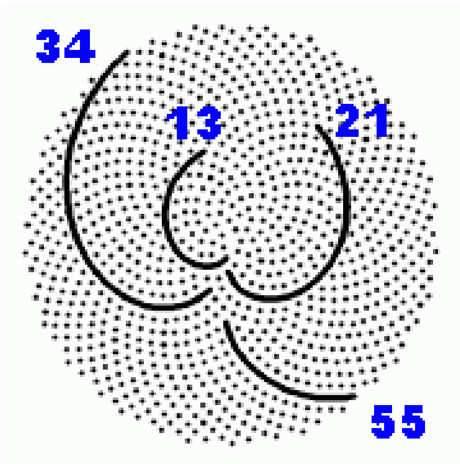


Fig.19

I semi del fiore di girasole, essendo tanti, cercano di occupare lo spazio circolare disponibile nella maniera più efficiente. Lo stesso avviene per i petali che formano un bocciolo di rosa o per le foglioline che si stringono a forma di cono sull'apice vegetativo delle piante. L'angolo di divergenza formato da due nuove foglie nella gemma di una pianta o da due petali di rosa o da due semi nel fiore di girasole misura circa 137,5°. Questo angolo viene chiamato *angolo aureo* perché 360° - 137,5° = 222,5° che è proprio il rapporto $\frac{360°}{\Phi}$. Si ritrova ancora la sezione aurea Φ in natura, ma in compagnia dei numeri di Fibonacci. Ci sarà un legame tra questi due meravigliosi oggetti matematici?

LA SUCCESSIONE DI FIBONACCI E IL NUMERO D'ORO

Una delle meraviglie della successione di Fibonacci che ci preme sottolineare è la relazione dei suoi termini con la sezione aurea che era stata intuita da Keplero, come si evince dalle sue parole:

"Siano 1 e 1 i termini più piccoli… sommandoli, il risultato è 2; aggiungiamo a questo il precedente 1, e otteniamo 3; aggiungiamogli 2, e otteniamo 5; aggiungiamogli 3, e abbiamo 8; 5 e 8 danno 13; 8 e 13 danno 21.

Come 5 sta a 8, così, approssimativamente, 8 sta a 13, e come 8 sta a 13, così, approssimativamente, 13 sta a 21."

Se indichiamo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ le soluzioni dell'equazione $x^2 = x+1$, sono vere le due uguaglianze:

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$
$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

Moltiplicando queste due uguaglianze rispettivamente per Φ^n e φ^n, con $n \geq 1$, si ha:

$$\Phi^{n+2} = \Phi^{n+1} + \Phi^n$$
$$\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$$

Sottraendo le due uguaglianze e dividendo per il numero $\Phi-\varphi\neq 0$ si ha:

$$\frac{\Phi^{n+2}-\varphi^{n+2}}{\Phi-\varphi}=\frac{\Phi^{n+1}-\varphi^{n+1}}{\Phi-\varphi}+\frac{\Phi^{n}-\varphi^{n}}{\Phi-\varphi}.$$

Indicando $\dfrac{\Phi^{n}-\varphi^{n}}{\Phi-\varphi}=f_n$ con $(n\geq 1)$ otteniamo l'uguaglianza

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n\ .$$

La successione f_n che abbiamo ottenuto è facile riconoscerla: è la successione di Fibonacci. Infatti il primo termine $f_1=\dfrac{\Phi-\varphi}{\Phi-\varphi}=1$, il secondo è $f_2=\dfrac{\Phi^2-\varphi^2}{\Phi-\varphi}=\dfrac{(\Phi+\varphi)(\Phi-\varphi)}{\Phi-\varphi}=\Phi+\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1$ e il termine generico f_{n+2} è ottenuto sommando i due termini che lo precedono.

Si trova così la possibilità di scrivere il termine generico della successione di Fibonacci senza dover calcolare tutti i termini che lo precedono. La formula ottenuta è:

$$f_n=\frac{\Phi^{n}-\varphi^{n}}{\Phi-\varphi}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Utilizzando questo risultato possiamo scoprire ancora un legame tra la sezione aurea e i numeri di Fibonacci. Scriviamo il rapporto tra il termine *(n + 1)*-esimo e il termine *n*-esimo della successione di Fibonacci:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\frac{\Phi^{n+1}-\varphi^{n+1}}{\Phi-\varphi}}{\frac{\Phi^{n}-\varphi^{n}}{\Phi-\varphi}}=\frac{\Phi^{n+1}-\varphi^{n+1}}{\Phi^{n}-\varphi^{n}}\ .$$

Dividendo per Φ^n il numeratore e il denominatore di questa frazione, si ha:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n}-\frac{\varphi^{n+1}}{\Phi^n}}{\frac{\Phi^n}{\Phi^n}-\frac{\varphi^n}{\Phi^n}}=\frac{\Phi-\varphi\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^n}{1-\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^n}\quad .$$

Essendo $\left|\frac{\varphi}{\Phi}\right|=\left|\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right|<1$ si ha che $\left(\frac{\varphi}{\Phi}\right)^n$ tende a zero quando n tende all’infinito. Pertanto il rapporto $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ tende al numero d’oro Φ quando n tende all’infinito.

È interessante sottolineare la rapidità con cui il rapporto $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ converge al numero d’oro Φ.

Infatti

$$\frac{f_{23}}{f_{22}}=\frac{28657}{17711}=1{,}6180339901755970865563773925809$$

Coincide con il numero

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}6180339887498948482045868343656$$

fino alla settima cifra decimale.

TERNE PITAGORICHE E SUCCESSIONE DI FIBONACCI

Charles Raine [12] ha trovato una ingenua connessione tra i numeri di Fibonacci e le terne pitagoriche.

Dati quattro numeri consecutivi della successione di Fibonacci, il prodotto dei due estremi e il doppio prodotto dei due numeri intermedi rappresentano le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è anch’essa espressa da un numero di Fibonacci.

Ad esempio:

considerata la prima quaterna della successione di Fibonacci, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$ effettivamente $f_1 \cdot f_4 = 3$, $2 f_2 \cdot f_3 = 4$ sono le lunghezze dei cateti di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa ha lunghezza 5, ancora un numero di Fibonacci $f_5 = 5$. Il posto che occupa 5 nella successione è dato dalla semisomma degli indici della quaterna considerata.

Non è finita qui!

L'area del triangolo è data dal prodotto dei quattro numeri della quaterna di Fibonacci.

1. Rappresentiamo quattro numeri consecutivi della successione di Fibonacci alla maniera seguente:

$$f_n = a \ , \ f_{n+1} = b \ , \ f_{n+2} = a + b \ , \ f_{n+3} = b + (a+b) = a + 2b \ .$$

Le lunghezze dei cateti del triangolo sono:

$l = a \cdot (a + 2b) = a^2 + 2ab$ (prodotto dei termini estremi della quaterna),

$m = 2b \cdot (a + b) = 2ab + 2b^2$ (doppio prodotto dei termini intermedi della quaterna).

L'ipotenusa del triangolo ha lunghezza i tale che:

$$\begin{aligned} i^2 &= (a^2 + 2ab)^2 + (2ab + 2b^2)^2 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 4a^2b^2 + 4a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 = \\ &= a^4 + 4a^3b + 8a^2b^2 + 8ab^3 + 4b^4 = \\ &= (a^2 + 2ab + 2b^2)^2 \end{aligned}$$

da cui si ha che:

$$\begin{aligned} i &= a^2 + 2ab + 2b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 = \\ &= (a + b)^2 + b^2 \end{aligned}$$

La lunghezza dell'ipotenusa è data dalla somma dei quadrati dei due termini intermedi della quaterna di numeri di Fibonacci considerata.

Tabella 1.

f_1				
f_2				
.				
.				$(n+2)$ *numeri*
.				
f_n	a			
f_{n+1}	b			
f_{n+2}	$a+b$	$=$	$(a+b)$	
f_{n+3}	$a+2b$	$=$	$b+(a+b)$	
·	$2a+3b$	$=$	$b+2(a+b)$	
·	$3a+5b$	$=$	$2b+3(a+b)$	
·	$5a+8b$	$=$	$3b+5(a+b)$	
				$(n+1)$ *numeri*
f_{2n+3}		$=$	$b \cdot b+(a+b)(a+b)$	

Come si può vedere dalla Tab. 1, al posto di indice $n+2$ nella successione di Fibonacci si trova $a + b$ e , proseguendo, dopo altri $n + 1$ passi si trova il numero:

$$b \cdot b+(a+b)(a+b)=b^2+(a+b)^2=i$$

Pertanto la somma di due numeri di Fibonacci consecutivi è un numero che fa parte della successione ed occupa il posto:

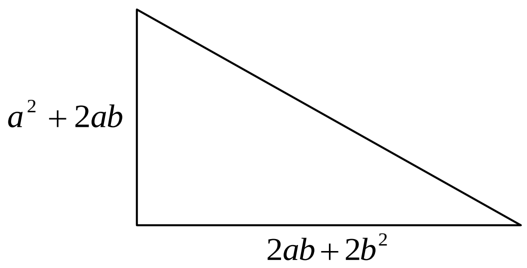
$$(n+2)+(n+1)=2n+3$$

ma $\qquad 2n+3=\frac{1}{2}[n+(n+1)+(n+2)+(n+3)]$.

Il posto occupato da i nella successione di Fibonacci è dato dalla semisomma degli indici dei quattro numeri della quaterna considerata f_n , f_{n+1} , f_{n+2} , f_{n+3}.

2. L'area del triangolo si può facilmente verificare che è data dal prodotto dei quattro numeri della successione di Fibonacci.

$$A = \frac{1}{2}\left(2ab + 2b^2\right)\left(a^2 + 2ab\right) = ab(a+b)(a+2b) \ .$$

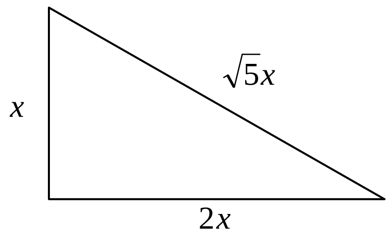


3. Le lunghezze dei cateti dei triangoli rettangoli costruiti a partire da una quaterna di numeri consecutivi di Fibonacci $l = 2b(a+b)$, $m = a(a+2b)$ crescono rapidamente andando avanti nella successione ma il loro rapporto $\frac{l}{m}$ tende a 2.

Infatti, poiché il rapporto $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ tra due numeri consecutivi di Fibonacci tende al numero aureo φ, si ha che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 f_{n+1} f_{n+2}}{f_n f_{n+3}} = 2\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+2}}{f_{n+3}}\right) = 2\Phi \frac{1}{\Phi} = 2 .$$

La situazione limite raggiunta dai triangoli presi in considerazione può essere rappresentata dalla figura



In questo caso limite, sommando il cateto più corto con l'ipotenusa e dividendo per il cateto più lungo si ritrova ancora il numero aureo:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad .$$

Senza dubbio possiamo essere d'accordo con Keplero nel considerare il teorema di Pitagora e il numero aureo due grandi tesori della geometria; è forse il caso di aggiungere che la successione di Fibonacci è una *catena d'oro* che li tiene stretti.

BIBLIOGRAFIA

[1] Barra M., 2012, Fusionismo fra algebra e geometria per dimostrare alcune proprietà delle terne pitagoriche e come occasione per un confronto fra i due linguaggi, *Progetto Alice*, vol. XIII, n°38, p. 207-220.
[2] Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L., 1992, *Fonti per la Storia dellaMatematica*, Sansoni Ed..
[3] Frajese A., Maccioni L. (a cura di), 1988,*Gli Elementi di Euclide*, UTET.
[4] Gheverghese G. J., 2000, *C'era una volta un numero*, Il Saggiatore.
[5] Hofstetter K., 2002,A simple Construction of the Golden Section, *Media Art Studio*, Langegasse 42/8c, A – 1080 Vienna.
[6] Ifrah G., 1983,*Storia universale dei numeri*, A Mondadori.
[7] Kline M.,1972, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi.
[8] Livio M., 2003, *La sezione aurea*, Rizzoli.
[9] Loria G., 1914, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Hoepli.
[10] Neugebauer O., 1974, *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli.
[11] Peano G., 1925, *Giochi di aritmetica e problemi interessanti*, Paravia.
[12] Raine C. W., 1948, Pythagorean triangles from the Fibonacci series, *ScriptaMathematica* 14.

Bruno Jannamorelli