

La duplicazione del cubo: un problema classico che ha stuzzicato tanti cervelli

Bruno Jannamorelli

Riassunto Ripropongo, in maniera semplificata, le costruzioni classiche per duplicare un cubo con l'applicazione di alcuni teoremi da parte di grandi geometri greci come Archita, Eratostene, Apollonio, Erone o con l'uso delle coniche di Menecmo. Forse queste soluzioni geniali possono continuare a stimolare l'interesse dei giovani di oggi e possono contribuire a giustificare lo studio della geometria.

Abstract I'm proposing, in a simplified way, the typical constructions employed in the duplication of a cube. The theorems of great surveyors like Archytas, Eratosthenes, Apollonius and Heron and the conics of Menaechmus have been widely used. These brilliant solutions might foster interest of today's young people and enhance motivation in the studying of geometry.

Il problema della duplicazione del cubo, ossia la costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di lato assegnato, è uno dei tre problemi classici della matematica greca, insieme alla trisezione dell'angolo e alla quadratura del cerchio. È necessario precisare che, per i Greci, il problema consisteva nella costruzione con riga e compasso dello spigolo del cubo richiesto. Non sono mai riusciti nell'impresa e per questo hanno cercato altre soluzioni.

Proponiamo alcune delle tante soluzioni trovate nel corso dei secoli, ma prima presentiamo le leggende relative alla nascita del problema.

Il sepolcro di Glauco o la peste di Atene

In una lettera indirizzata da Eratostene (276 a.C. – 194 a.C.) a Tolomeo III si parla di due leggende che hanno dato origine al problema della duplicazione del cubo:

Eratostene a Tolomeo, salute.

Narrano che uno degli antichi poeti tragici facesse apparire sulla scena Mino [Minosse, re di Creta] nell'atto di far costruire una tomba al figlio Glauco e che Mino, accorgendosi che questa era lunga da ogni lato cento piedi, dicesse: "... piccolo spazio invero accordasti ad un sepolcro di re; raddoppialo, conservandolo sempre di forma cubica, raddoppia subito tutti i lati del sepolcro".

Or è chiaro che egli s'ingannava. Infatti, duplicandone i lati, una figura piana si quadruplica, mentre una solida si ottuplica.

Allora anche fra i geometri fu agitata la questione in qual modo si potesse duplicare una data figura solida qualunque, conservandone la specie. E questo problema fu chiamato duplicazione del cubo.



Eratostene di Cirene,
Libia (276-194 a.C.)

Più avanti nella stessa lettera, Eratostene riporta un'altra leggenda che parla dell'oracolo di Delo:

...che aveva imposto agli abitanti di Delo di raddoppiare l'altare di forma cubica, dedicato al dio. Il quesito aveva generato aporia negli "architetti", che ne avevano cercata la soluzione, sicché i Deli avevano cercato consiglio presso Platone, che aveva interpretato l'oracolo come un rimprovero del dio agli Elleni di trascurare la geometria e un invito a occuparsene, non tanto come un'espressione del desiderio del dio di avere un altare doppio.

Una conferma di questa leggenda la troviamo in Giovanni Filopono (vissuto nel VI secolo d.C. ad Alessandria d'Egitto) il quale narra di una devastante epidemia di peste che mieteva tante vittime e del ricorso degli abitanti all'oracolo di Delo per sapere cosa dovessero offrire al dio Apollo per placare la pestilenza.

“...quando dio annunciò agli abitanti di Delo, attraverso l'oracolo, che, al fine di sbarazzarsi della pestilenza, essi dovesse costruire un altare doppio di quello che esisteva, i loro operai specializzati caddero in una grande perplessità nei loro tentativi di scoprire come si potesse realizzare il doppio di un solido simile; essi, perciò, si recarono da Platone, per interrogarlo a proposito di ciò, ed egli rispose che l'oracolo non intendeva che il dio volesse un altare di misura doppia, ma che egli desiderava, nell'affidargli il compito, disonorare i Greci per la loro negligenza in matematica e il loro disprezzo della geometria. “Il dio ha punito il popolo per aver trascurato la scienza della geometria che è scienza per eccellenza”.

Racconti analoghi ricorrono anche in altri testi di Plutarco, precisamente *De E apud Delphos* (6, 386 e) e *De genio Socratis* (7, 579 b-d), con l'aggiunta in quest'ultimo che i Deli si erano rivolti a Platone in quanto *geometrikòs*.

Soluzione di Ippocrate di Chio

Eratostene, sempre nella lettera già citata, parla delle prime soluzioni al problema della duplicazione del cubo:



Hippocrate di Chio, pitagorico vissuto nella seconda metà del V sec a.C.

“Dopo che tutti furono per lungo tempo titubanti, per primo Ippocrate di Chio trovò che se tra due segmenti, dei quali il maggiore sia doppio del minore, si inscrivono due medie in proporzione continua, il cubo sarà duplicato, e così tramutò una difficoltà in altra non minore.

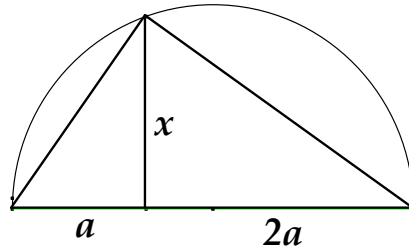
Essi [i geometri dell’Accademia di Platone] se ne occuparono con diligenza e si dice che, avendo cercato d’inserire due medie fra due rette, Archita Tarantino vi riuscisse col semicilindro ed Eudosso invece mediante certe linee curve. Questi furono seguiti da altri nel rendere più perfette le dimostrazioni, non però nell’effettuare la costruzione ed accomodarla alla pratica, eccettuato forse Menecmo e con gran fatica.”

Per comprendere l’idea geniale di Ippocrate è necessario premettere che, al suo tempo, era ben noto che il lato di un quadrato di area doppia di quella di un quadrato di lato a è il medio proporzionale x tra a e $2a$. Infatti dalla proporzione

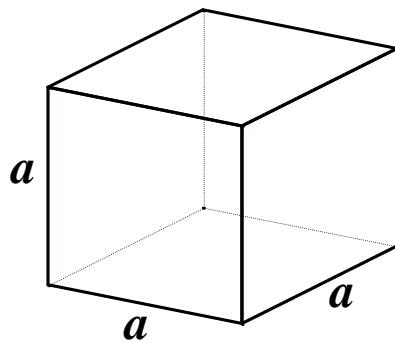
$$a : x = x : 2a$$

si ha $x^2 = 2a^2$, quindi il quadrato di lato x ha area x^2 doppia di quello di lato a e area a^2 .

La costruzione geometrica del lato x è basata su quello che noi conosciamo come secondo teorema di Euclide: basta disegnare il semicerchio di diametro $3a$ e il triangolo rettangolo in esso inscritto avente i cateti con proiezioni ortogonali sull’ipotenusa (diametro) pari ad a e $2a$. L’altezza del triangolo relativa all’ipotenusa è il segmento di lunghezza x medio proporzionale tra a e $2a$.



In maniera analoga, per duplicare un cubo di lato a e volume a^3 bisogna trovare un segmento di lunghezza x tale che $x^3 = 2a^3$.



Ippocrate pensò di ricondurre il problema alla costruzione di due segmenti x , y in proporzione media continua tra i segmenti di lunghezza a e $2a$:

$$a : x = x : y = y : 2a .$$

Infatti, dalla prima proporzione si ha $x^2 = ay$, dalla seconda $y^2 = 2ax$ e risolvendo il sistema formato da queste due equazioni

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{a} \\ \frac{x^4}{a^2} = 2ax \end{cases}$$

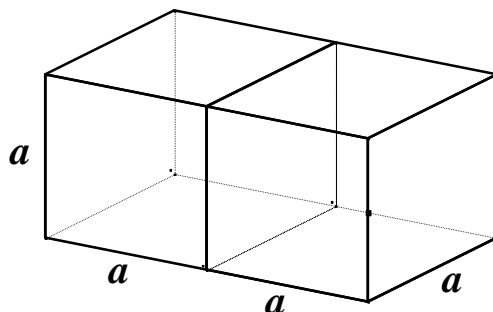
si ricava proprio $x^3 = 2a^3$.

La costruzione geometrica del segmento x , lato del cubo di volume doppio di quello di lato a , non viene fornita. Il problema è stato solo spostato per dare la possibilità ad altri di risolverlo. Ma come avrà fatto Ippocrate a partorire questa idea? Forse ha ragionato come viene riportato di seguito nella soluzione attribuita a Platone: si applica due volte il secondo teorema di Euclide a due triangoli rettangoli.

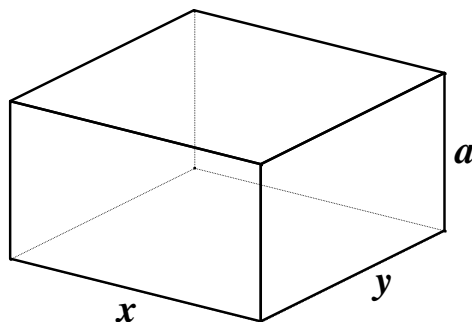
Nessuno può confermare questa ipotesi o indicare un'altra strada seguita da Ippocrate. A me piace immaginare che abbia seguito un ragionamento simile a quello riportato da Bunt-Jones-Bedient in ([1], pag.110).

Partiamo da due cubi, aventi i lati di lunghezza a , realizzati con argilla fresca e cominciamo a pasticciare ...

1. Incolliamo i due cubi lungo una faccia, in modo da ottenere un parallelepipedo di lati $2a, a, a$. Il volume di tale solido è $2a^3$, ma non è un cubo!



2. Cominciamo a trasformare questo parallelepipedo in un altro solido, avente sempre lo stesso volume, mantenendo la stessa altezza a . Cambia la base che non è più un rettangolo di lati a e $2a$, ma un rettangolo di lati x e y . Il lato x è quello del cubo di volume $2a^3$ che vogliamo costruire.



Ribadiamo che in questa trasformazione non buttiamo via nemmeno un pezzettino di argilla e, se l'altezza rimane a , allora l'area di base deve rimanere invariata, pertanto:

$$xy = 2a \cdot a ,$$

da cui si trova la prima proporzione:

$$a : x = y : 2a .$$

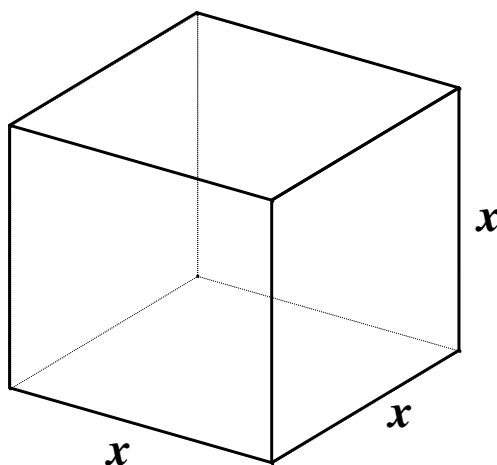
3. Modifichiamo la faccia di lati a e y in modo da ottenere un cubo di lato x , conservando tutta l'argilla. Questo è possibile se la faccia laterale di area $a \cdot y$ viene trasformata in un quadrato di lato x e quindi di area x^2 :

4.

$$x^2 = a \cdot y$$

da cui si ricava l'altra proporzione

$$a : x = x : y$$



5. Dalle due proporzioni si ha la doppia proporzione di Ippocrate:

$$a : x = x : y = y : 2a .$$

Soluzione attribuita a Platone

L'unico contributo di Platone allo sviluppo della geometria, noto fino ad oggi, consisterebbe in un procedimento da lui immaginato per inserire due medie proporzionali fra due segmenti dati. Esso è stato riferito, come viene riportato di seguito, da Eutocio di Ascalona (a sud dell'attuale territorio di Israele), vissuto tra il V e il VI secolo d.C., conosciuto come commentatore delle opere di Archimede.

Dati due segmenti, trovare due medie proporzionali in proporzione continua.

I due segmenti AB e BC fra i quali bisogna trovare due medie proporzionali siano fra loro perpendicolari. Si prolunghino verso D, E [in modo da formare una croce] come in fig. 1.

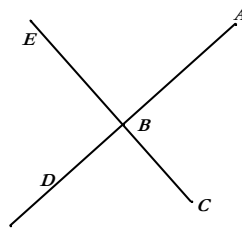
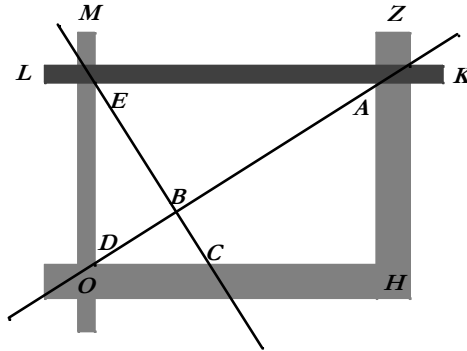


Fig.1

Si costruisca un angolo retto ZHO [con due righelli di legno] e sul lato ZH si faccia scorrere, entro una scanalatura, una riga KL in modo che resti sempre parallela a HO. Ciò accadrà se noi immaginiamo una seconda riga OM connessa a OH [ma libera di muoversi sul segmento OH] e parallela a ZH: infatti se le superfici anteriori delle due righe ZH, OM sono munite di scanalature conformate a incastro e in queste penetrano dei tasselli incollati alla riga KL, nel suo moto la riga KL rimarrà sempre parallela ad HO.

Fatto ciò, si faccia coincidere il punto D con il punto d'intersezione di OH e OM, mentre C viene a trovarsi su OH; si muova la riga KL e l'altra OM in modo che E coincida con l'intersezione di OM e KL e il punto A coincida con l'intersezione di ZH e KL. Allora si sarà ottenuto quello che si voleva. Essendo, infatti, i triangoli CDE e DEA rettangoli, rispettivamente in D e in E, si avrà:

$$BC : BD = BD : BE = BE : AB.$$



Facendo in modo che sia $AB = 2BC$, il segmento BD è il lato del cubo di volume doppio di quello avente lo spigolo BC .

Si tratta indubbiamente di una soluzione semplice ed elegante. È una applicazione del teorema: “*L’altezza relativa all’ipotenusa di un triangolo rettangolo è media proporzionale fra le proiezioni ortogonali dei cateti sull’ipotenusa stessa*”, applicato due volte ai triangoli rettangoli CDE e AED . Questo teorema era già noto ad Archita di Taranto il quale aveva insegnato la geometria a Platone e quindi la soluzione descritta da Eutocio potrebbe essere attribuita al grande filosofo greco. Però come si fa a riconoscere la paternità di una soluzione meccanica a colui che detestava l’uso di mezzi meccanici per risolvere problemi geometrici? Una delle tante espressioni di Platone in merito è la seguente: “... perché così le prerogative della geometria vengono oscurate e tolte. Essa è ricondotta allo stato pratico, invece di fare come oggetti di essa le figure eterne ed incorporee”.



“Duplicatore del cubo”: una riproduzione di Luca Taglieri

Visto che il solo Eutocio riferisce della soluzione meccanica di Platone e, invece, Eratostene nella lettera a Tolomeo III non la cita, è probabile che non sia stato il grande filosofo l'autore del suddetto congegno. Forse Platone aveva ideato la soluzione dei due triangoli rettangoli per trovare la doppia proporzione continua e qualche suo commentatore aveva pensato a congegnare quel semplicissimo strumento meccanico che facilita la soluzione. Oppure Platone ha voluto dimostrare quanto fosse facile ricorrere a strumenti meccanici per risolvere problemi di geometria.

Soluzione di Archita



Archita da Taranto

(Taranto 428 a.C., Mattinata 360 a.C.). Busto proveniente dalla Villa dei papiri di Ercolano, ora al Museo Archeologico Nazionale di Napoli

Filosofo tra i più illustri della scuola Pitagorica, merita un posto di rilievo nella storia della Matematica, potendo essere considerato il fondatore della Meccanica Razionale.

Fu un ingegno poliedrico preoccupato dell'unità del sapere. Cercò il vero in tutto e per tutto, fu teorico e tecnico, sostenendo che l'esperienza affascinante della scienza e della scoperta non dà gioia se non la si può comunicare agli amici, in opposizione, sembra, al senso di segretezza e di mistero che avvolgeva la scuola pitagorica.

Il metodo di Archita per trovare due medie proporzionali tra due segmenti assegnati è stato riferito da Eudemo ([3], pag.99) e qui viene riproposto con alcune modifiche per renderlo più comprensibile.

“Siano dati due segmenti AD e AB ($AD > AB$). Si disegni una circonferenza di diametro AD e si tracci la corda AB il cui prolungamento incontri in H la tangente t alla circonferenza in D . Si conduca la parallela BZ alla tangente t che interseca in E il diametro AD .

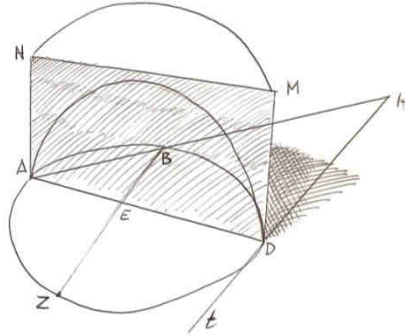


Fig.2

Si immagini di costruire sul semicerchio ABD , perpendicolarmente ad esso, un semicilindro (fig. 2). Sul rettangolo $ADMN$ si tracci una semicirconferenza \mathcal{C} di diametro AD . Si immagini di far ruotare \mathcal{C} (nel verso antiorario) tenendo ferma l'estremità A del diametro: in questo movimento il semicerchio di diametro AD avente il contorno \mathcal{C} intersecherà la superficie laterale del semicilindro lungo una certa linea γ (chiamata la curva di Archita). Inoltre, se si fa ruotare il triangolo AHD intorno al segmento AD nel verso contrario della rotazione del semicerchio, il segmento AH genererà una superficie conica che intersecherà in un certo punto K la curva γ . Nello stesso tempo il punto B descriverà una semicirconferenza sulla superficie del cono.

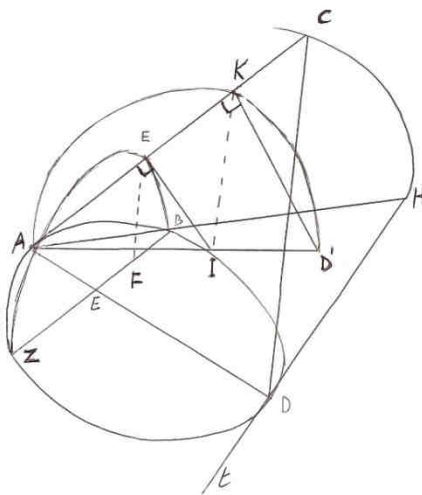


Fig.3

Nell'istante in cui si ottiene il punto K , il semicerchio mobile abbia la posizione $AD'K$ (fig.3), il triangolo mobile la posizione ADC e il semicerchio descritto da B sulla superficie conica abbia diametro BZ . Si conduca da K la perpendicolare al piano contenente il semicerchio ABD : questa cadrà nel punto I sul contorno del semicerchio, perché il semicilindro è retto. La corda AI incontra in F il diametro BZ e il segmento AC (generatrice del cono) incontra in E la semicirconferenza di diametro BZ . Si conducano pure i segmenti AD' , KI , EF . Ora, siccome i due semicerchi di diametro AD' e BZ sono entrambi perpendicolari al piano dato (contenente il cerchio di diametro AD), anche la loro intersezione EF è perpendicolare a questo piano. Poiché, quindi, EF è anche perpendicolare a BZ , sarà:

$\overline{FB} \times \overline{FZ} = \overline{EF}^2$ (per quello che oggi chiamiamo secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo BEZ).

Inoltre, $FA : FZ = FB : FI$ (per quello che oggi conosciamo come teorema delle corde)

e pertanto $\overline{FA} \times \overline{FI} = \overline{FB} \times \overline{FZ} = \overline{EF}^2$, quindi il triangolo AEI è rettangolo in \hat{E} ed è simile ai due triangoli EFI , EAF . Ma è retto anche l'angolo $\widehat{AKD'}$ e, in conseguenza di ciò, i segmenti EI e KD' sono paralleli.

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli AKD' , AKI e AEI segue:

$$AD' : AK = AK : AI = AI : AE.$$

In conclusione, i quattro segmenti AD' , AK , AI , AE sono in doppia proporzione continua ma, $AE = AB$, $AD' = AD$ e pertanto tra i segmenti AD e AB si sono trovate due medie proporzionali.

La soluzione di Menecmo

Il più famoso allievo di Eudosso è stato Menecmo (380 a.C. , 320 a.C.) a cui si attribuisce la prima classificazione delle sezioni coniche, nacque ad Alopeconneso (città del Chersoneso Tracio, attuale Turchia) o forse a Proconneso (isola della Propontide).

La soluzione del problema di Delo trovata da Menecmo con le sezioni coniche, annunciata nella lettera di Eratostene a Tolomeo II, è stata descritta da Eutocio in due forme diverse nel suo commento al secondo libro di Archimede: "Su la sfera e il cilindro". Il commento di Eutocio è stato riportato in G. Loria ([3], pag. 151) e qui viene riproposta solo la seconda forma con un linguaggio più vicino a quello moderno:

“Siano dati due segmenti AB e BG fra loro perpendicolari (fig. 4). Fra essi siano medi proporzionali i segmenti DB e BE , onde si abbia: $BG : BD = BD : BE = BE : AB$. Dalla proporzione $BG : BD = BD : BE$ si ha che il rettangolo di area $\overline{BG} \times \overline{BE}$ è equivalente al quadrato di area \overline{BD}^2 ossia \overline{EZ}^2 . Il punto Z apparterrà ad una parabola avente per asse BE e parametro BG .

[Nel linguaggio moderno della Geometria Cartesiana: se $\overline{BD} = x$, $\overline{BE} = y$, $\overline{BG} = a$, allora $ay = x^2$, ossia $y = \frac{1}{a}x^2$.]

Inoltre, essendo $BD : BE = BE : AB$, il rettangolo di area $\overline{AB} \times \overline{BD}$ è equivalente al quadrato di area \overline{BE}^2 , cioè \overline{DZ}^2 . Quindi Z appartiene a una parabola di asse BD e parametro AB .

[Nel linguaggio moderno della Geometria Cartesiana: se $\overline{BD} = x$, $\overline{BE} = y$, $\overline{AB} = 2a$, allora $2ax = y^2$, ossia $x = \frac{1}{2a}y^2$. Il punto Z , intersezione delle due parabole, ha l'ascissa $\overline{BD} = x$ e l'ordinata $\overline{BE} = y$ che sono medie proporzionali tra BG e AB . Se $AB = 2BG$, allora l'ascissa di Z è il lato del cubo di volume $2a^3$].

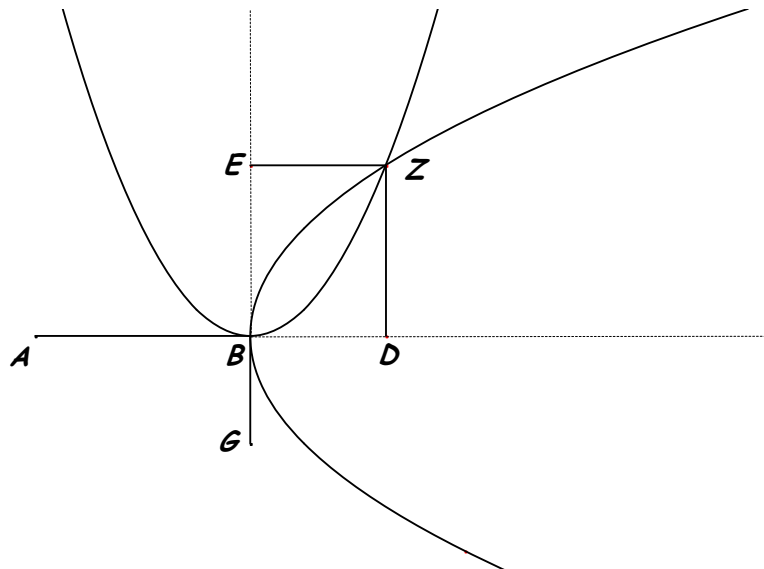


Fig. 4

Il problema della duplicazione del cubo di lato BG si risolve, dunque, come segue:

dati due segmenti fra loro perpendicolari BG e AB [AB = 2BG] , si prolunghino indefinitamente oltre B. Si descriva una parabola di asse BE e parametro BG; poi una seconda di asse BD e parametro AB. Le due parabole si taglino in Z e da Z si conducano le perpendicolari ZD, ZE. Essendo allora ZE, cioè BD, una ordinata di parabola sarà $\overline{BG} \times \overline{BE} = \overline{BD}^2$, onde

$$BG : BD = BD : BE.$$

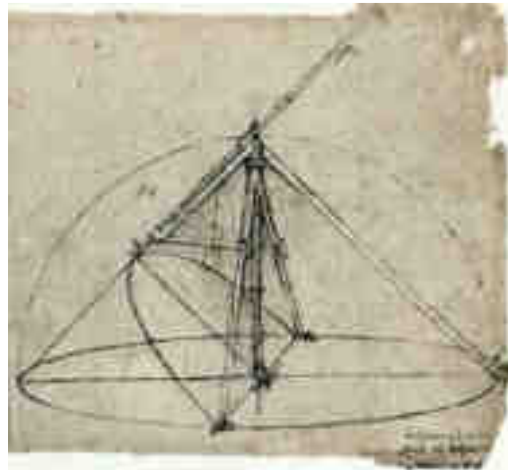
Inoltre, essendo DZ, cioè BE, una ordinata di parabola sarà $\overline{AB} \times \overline{BD} = \overline{BE}^2$, onde $BD : BE = BE : AB$.

Ma si aveva prima $BG : BD = BD : BE$, perciò

$$BG : BD = BD : BE = BE : AB.$$

Come bisognava ottenere.

La parabola si descrive poi mediante il διαβητηξ [strumento di forma simile alla lettera greca λ] inventato dal maestro meccanico Isidoro da Mileto e da lui descritto nel commento che compose alle χαμαριχα (arte di costruire gli archi) di Erone. ([3], pag.153). Chissà se somigliava al compasso parabolico di Leonardo da Vinci?



Compasso parabolico di Leonardo da Vinci (Codice Atlantico, foglio 1093 recto)

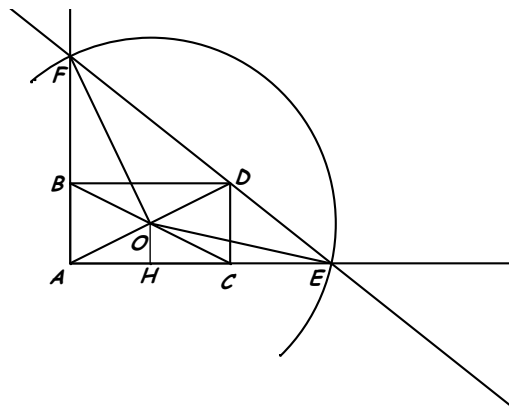
Soluzione di Apollonio-Erone

Apollonio di Perga visse dal 262 al 190 a. C. circa. Era noto nell'antichità come "il grande geometra". Ebbe una grande influenza sullo sviluppo della matematica, specialmente per la sua opera più famosa, **Le coniche**, in cui introdusse termini quali parabola, ellisse, iperbole, che continuano ad essere usati.



Fra le otto soluzioni del problema della *duplicazione del cubo* descritte da Eutocio nel suo prezioso commento al II dei libri di Archimede *Su la sfera e il cilindro*, c'è quella riportata di seguito attribuita ad Apollonio.

I due segmenti fra i quali bisogna inserire due medie proporzionali siano AB e AC che formano un angolo retto in A . Con centro in B e raggio uguale ad AC si descriva una circonferenza e poi con centro in C e raggio uguale ad AB si descriva una seconda circonferenza la quale intersechi la prima in D e si conducano i segmenti DA , DB , DC , BC : si avrà allora un rettangolo. Con centro in O , punto d'intersezione delle diagonali del rettangolo, si disegni una circonferenza che intersechi i prolungamenti di AB e AC in F , E , facendo in modo che questi punti siano allineati con D .



Le medie proporzionali tra AB e AC sono i segmenti CE e BF . La dimostrazione viene esposta da Eutocio quando riporta la soluzione del problema della duplicazione del cubo fatta da Erone e Filone.



Erone di Alessandria come immaginato in una stampa del 1688

Le notizie sulla vita di Erone sono scarsissime: il secolo in cui visse è stato individuato datando al 13 Marzo del 62 d.C. un'eclissi di Luna da lui osservata. Matematico e meccanico, ricoprì la carica di insegnante di materie tecniche nel prestigioso Museo di Alessandria. Attento lettore dei testi di Ctesibio e Filone, Erone studiò accuratamente anche le opere di Euclide e Archimede, traendone notevole frutto. Autore di numerosi trattati, Erone affermerà con vigore la necessità di una preparazione completa, fatta di teoria e pratica. "L'esperienza è la migliore educatrice"

Come dunque troveremo due medie proporzionali consecutive tra due segmenti dati? – si chiede Erone nel suo libro Meccanica, e prosegue - ... siano AB e AC i due segmenti dati, perpendicolari tra loro: sono i due segmenti fra cui vogliamo trovare due medie proporzionali. Completiamo il rettangolo $ABDC$ conducendo i lati DB e DC , uniamo A con D e B con C , poi facciamo passare nel punto D una riga che intersechi i prolungamenti di AB e di AC e che noi, mediante rotazione, disporremo in una posizione tale che siano uguali i segmenti uscenti da O terminanti nei punti d'intersezione della riga con i prolungamenti di AB e di AC : siano F ed E tali punti.

Dico che i segmenti CE e BF sono medi proporzionali tra AB e AC ; il primo termine dei rapporti sarà AB , il secondo sarà CE , BF il terzo e AC il quarto. Infatti, il quadrilatero $ABDC$ ha i lati a due a due paralleli e gli angoli retti: dunque i quattro segmenti OA , OB , OC , OD sono uguali. Il segmento OA essendo uguale al segmento OC e la linea OE essendo già stata condotta, abbiamo:

$$\overline{AE} \cdot \overline{CE} + \overline{CO}^2 = \overline{OE}^2$$

[Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli OHE e OHC si ha:

$$\begin{aligned} \overline{OE}^2 &= \overline{OH}^2 + \overline{HE}^2 \\ \overline{CO}^2 &= \overline{OH}^2 + \overline{HC}^2, \end{aligned}$$

da cui, sottraendo, si ha:

$$\overline{OE}^2 - \overline{CO}^2 = \overline{HE}^2 - \overline{HC}^2 = (\overline{HE} + \overline{HC})(\overline{HE} - \overline{HC}).$$

Ma, $\overline{HE} + \overline{HC} = \overline{HE} + \overline{AH} = \overline{AE}$, $\overline{HE} - \overline{HC} = \overline{CE}$,

e quindi, $\overline{OE}^2 - \overline{CO}^2 = \overline{AE} \cdot \overline{CE}$, ossia:

$$\overline{AE} \cdot \overline{CE} + \overline{CO}^2 = \overline{OE}^2,$$

e questa è la relazione scritta da Erone].

Similmente:

$$\overline{AF} \cdot \overline{FB} + \overline{BO}^2 = \overline{FO}^2.$$

I due segmenti OE e FO sono uguali, onde risulta

$$\overline{AE} \cdot \overline{CE} + \overline{CO}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{FB} + \overline{BO}^2$$

ma $\overline{CO}^2 = \overline{BO}^2$, quindi resta

$$\overline{AE} \cdot \overline{CE} = \overline{AF} \cdot \overline{FB},$$

ossia $\overline{AF} : \overline{AE} = \overline{CE} : \overline{FB}$.

D'altra parte, dalla similitudine dei triangoli DCE , FAE , e FBD si ha: $\overline{DC} : \overline{CE} = \overline{AF} : \overline{AE} = \overline{FB} : \overline{BD}$.

In conclusione, $\overline{DC} : \overline{CE} = \overline{CE} : \overline{FB} = \overline{FB} : \overline{BD}$

Ed essendo $\overline{DC} = \overline{AD}$ e $\overline{BD} = \overline{AC}$, risulta che CE e FB sono medie proporzionali tra AB e AC .

È quanto volevamo dimostrare.

Soluzione di Diocle

Diocle di Caristo (Karystos, 240 a.C. – 180 a.C.) è stato un matematico e geometra minore vissuto nel periodo aureo della geometria greca. Caristo si trovava nell'isola Eubea nel Mare Egeo, adiacente a parte della costa

sud-orientale della penisola greca, dove l'isola dista dalla terraferma solo 40 m, famosa un tempo per i suoi numerosi buoi (da cui origina il nome).

Diocle trovò un procedimento molto interessante per inserire due medie proporzionali tra due segmenti assegnati utilizzando una nuova curva: la cissoide. Riportiamo di seguito la descrizione di questo metodo presa dal commento di Eutocio al libro di Archimede: *Su la sfera ed il cilindro*.

In un cerchio si traccino due diametri AB e CD fra loro perpendicolari (fig. 5). A destra e a sinistra di B si taglino due archi uguali BE e BZ e per Z si conduca ZH parallela ad AB . Si congiunga poi D con E .

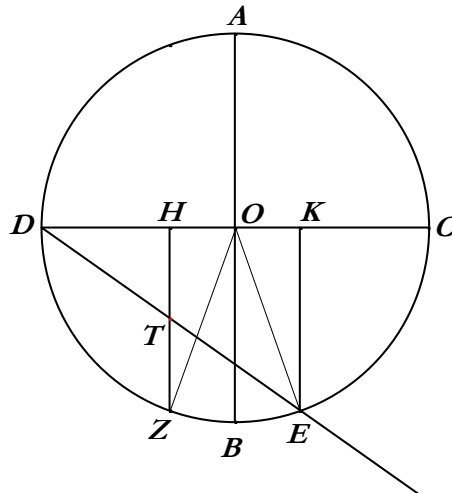


Fig. 5

Dico che fra i segmenti CH e HT sono medie proporzionali HZ e HT .

Per dimostrarlo si conduca per E la EK parallela ad AB . Sarà in conseguenza $EK = ZH$ e $CK = HD$, perché sono uguali i triangoli HOZ e KOE .

Essendo poi $DK : KE = DH : HT$, [perché i triangoli DKE e DHT sono simili], e $DK : KE = KE : KC$, [perché il triangolo DEC è rettangolo in E e l'altezza KE relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni ortogonali DK e KC dei cateti sull'ipotenusa], sarà:

$$DK : KE = KE : KC = DH : HT.$$

Ma $DK = CH$, $KE = HZ$, $KC = DH$, dunque è pure:

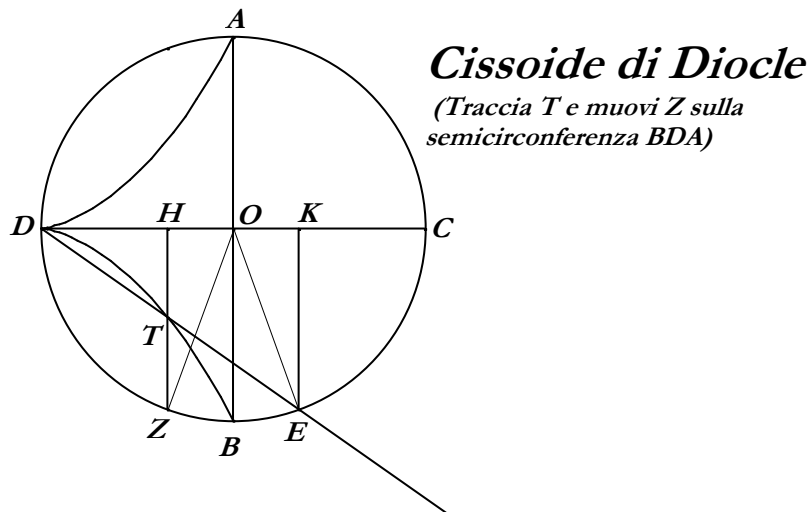
$$CH : HZ = HZ : DH = DH : HT,$$

come si era enunciato.

Facendo variare i due archi di circonferenza uguali il punto T descrive una curva all'interno del cerchio come quella di fig.6, che presenta una cuspidi nel punto D . La curva ricorda la punta di una foglia d'edera e per questo è stata chiamata *cissoide* (dal greco *kissoeides*, composto di *kissos*, edera, e *oeides*, forma).

Disegnando la *cissoide* di Diocle e prendendo un punto T su di essa, è possibile ottenere due medie proporzionali HZ e DH tra due segmenti assegnati CH e HT . In particolare, se $CH = 2HT$, allora DH è il lato del cubo di volume doppio di quello avente come spigolo HT :

$$\overline{DH} = \overline{HT}^3 \sqrt{2}$$



(La *Cissoide* di Diocle si disegna facilmente utilizzando un software di Geometria Dinamica).

La soluzione di Eratostene

Eratostene, nato a Cirene (oggi Shahhat, in Libia) nel 276 a.C., fu il terzo bibliotecario della famosa biblioteca di Alessandria d'Egitto dove morì nel 194 a.C., descrive accuratamente la sua soluzione meccanica dell'inserimento di due medie proporzionali tra due segmenti assegnati nella lettera indirizzata a re Tolomeo III già citata:

“Siano dati due segmenti diseguali AE e DT fra cui bisogna inserire due medie in proporzione continua. Sia AE perpendicolare a ET e su ET si costruiscano tre rettangoli uguali dei quali si traccino le diagonali AZ , LH , MT fra loro parallele (fig.7). Tenendo fermo il rettangolo intermedio, si accostino ad esso gli altri due, ponendo quello di sinistra al di sopra e quello di destra al di sotto di esso (fig.8), in modo che i punti A , B , G , D si dispongano in linea retta. Per questi punti A , B , G , D si conduca una retta la quale incontri in K la retta ottenuta prolungando ET ”.

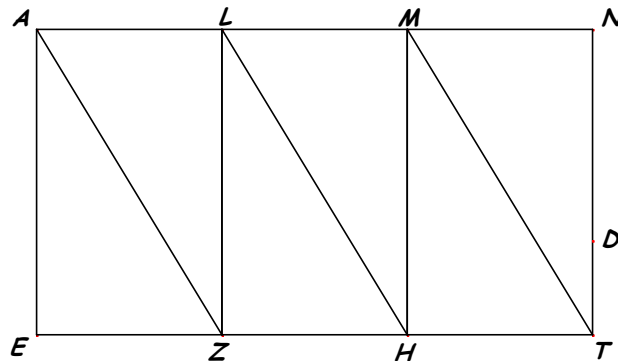


Fig.7

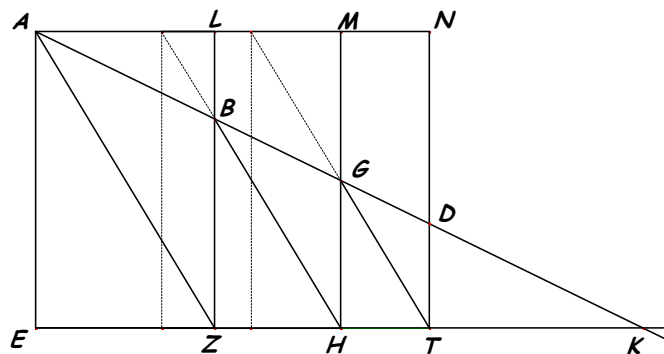


Fig.8

Essendo paralleli i segmenti AE , BZ , si avrà:

$$AK : KB = EK : ZK,$$

e dal parallelismo di AZ e BH si avrà:

$$AK : KB = ZK : HK.$$

Da queste due proporzioni risulta:

$$(1) \quad EK : ZK = ZK : HK.$$

Similmente, essendo paralleli BZ e GH, sarà:

$$BK : GK = ZK : HK,$$

ed essendo paralleli anche BH e GT, sarà:

$$BK : GK = HK : TK.$$

Da queste ultime due proporzioni risulta:

$$(2) \quad ZK : HK = HK : TK.$$

Combinando la (1) e la (2) si ha:

$$(3) \quad EK : ZK = ZK : HK = HK : TK.$$

In questo modo si sono trovate due medie proporzionali ZK e HK fra i segmenti EK e TK, mentre l'obiettivo è trovare due medie proporzionali fra AE e DT.

Per raggiungere l'obiettivo basta osservare le similitudini fra i triangoli AEK e BZK da cui si ha:

$$EK : ZK = AE : BZ,$$

fra i triangoli BZK e GHK da cui si ha

$$ZK : HK = BZ : GH$$

e infine fra i triangoli GHK e DTK da cui risulta:

$$HK : TK = GH : DT.$$

Finalmente, si può sostituire la (3) con la seguente doppia proporzione:

$$AE : BZ = BZ : GH = GH : DT$$

e l'obiettivo è raggiunto: BZ e GH sono due medie proporzionali tra i segmenti assegnati AE e DT.

Eratostene accompagna la precedente dimostrazione con la descrizione accurata dello strumento adatto a costruire le due medie proporzionali. Si tratta di tre tavolette rettangolari fra loro uguali che possono scorrere una sull'altra e di una riga che serve per allineare i punti A, B, G, D, T.

Un modello in bronzo di quello strumento, chiamato da Pappo *mesolabio*, sembra fosse stato infisso su una colonna ad Alessandria con la dimostrazione precedente scolpita e accompagnata da un epigramma:

"Se, cari amici, voi cercaste di ottenere da ogni piccolo cubo un cubo doppio di esso, e regolarmente, cambiare ogni figura solida in un'altra, questo è in vostro potere; voi potete trovare la misura di un ovile, un fosso o un'ampia profondità di un buco, attraverso questo metodo, che consiste nel mettere tra due regolatori, due medi con i loro estremi che convergono. Non cercate di compiere la difficile impresa dei cilindri di Archytas, o di tagliare un cono in tre parti come Menecmo, o di tracciare col compasso una forma curva di linee, come è descritto dal timoroso di Dio, Eudoxus. Inoltre, potreste, su queste tavolette, trovare facilmente una miriade di significati, cominciando da una piccola base. Felice arte, Tolomeo, in quello, i suoi figli uguali per vigore nella gioventù, voi stessi avete dato loro tutto ciò che è caro alle muse e ai Re, e potrebbe forse in futuro, O Zeus, dio del paradiso, ricevere lo scettro nelle sue mani. Potrebbe essere così, e lasciate che ciascuno che vede questa offerta dica 'Questo è il dono di Eratostene di Cirene'".



Mesolabio: una riproduzione di Bruno Jannamorelli

Soluzione approssimata di Leonardo da Vinci



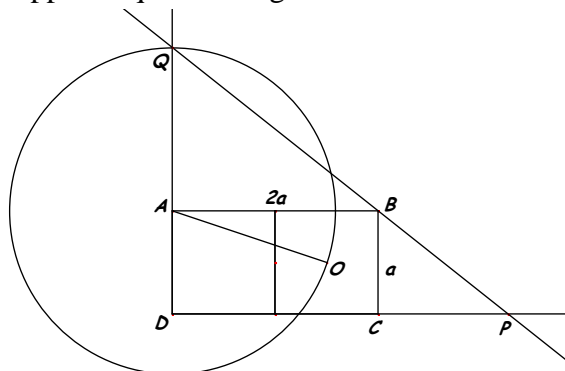
Nel Codice Atlantico, foglio 161 recto, Leonardo riporta l'esempio:

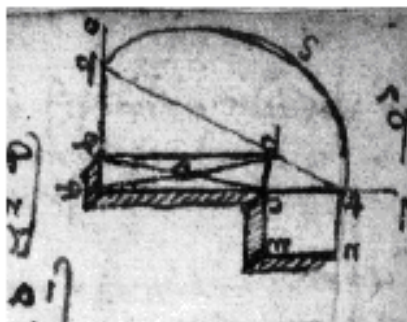
Un cubo di lato 5 ha volume doppio di quello di un cubo di lato 4.

Il cubo di lato 4 ha volume 64 e il suo doppio è 128 la cui radice cubica è 5,039 di poco superiore a 5, soluzione proposta da Leonardo. Da un punto di vista empirico è una soluzione accettabile, ma è davvero poca cosa se confrontata con le soluzioni dei grandi geometri greci!

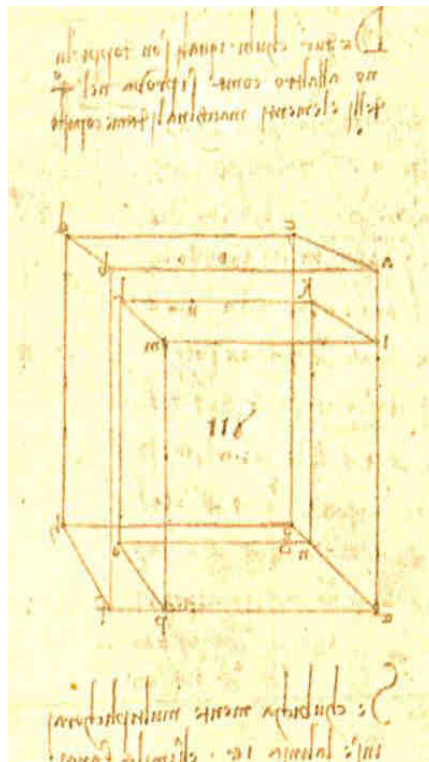
Il problema della duplicazione del cubo fu affrontato in maniera empirica da Leonardo da Vinci e la sua soluzione può essere sintetizzata in tre passi:

1. Disegna su un piano un rettangolo $ABCD$ formato da due facce del cubo che si vuole raddoppiare.
2. Sul prolungamento del lato corto del rettangolo riporta con il compasso il segmento che parte dal vertice A , in alto a sinistra del rettangolo, e arriva al centro del quadrato a destra del rettangolo.
3. Unisci con una retta il punto trovato Q con il vertice B in alto a destra del rettangolo. Se chiami P il punto d'intersezione di tale retta con il prolungamento del lato lungo del rettangolo, allora CP è il lato del cubo di volume doppio di quello assegnato di lato BC .





Leonardo da Vinci
Codice Forster I, foglio 32



Bibliografia

- Boyer C.B, 1990, Storia della matematica, Mondadori.
 Bunt L.N.H., Jones P.S., Bedient J.D., 1983, *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna..
 de Finetti B., 1959 (1943), *Matematica logico intuitiva*, Cremonese.
 Giacardi L., Roero S.C., 1979, *La matematica delle civiltà arcaiche*, Stampatori.
 Heath, T., 1981, *A History of Greek Mathematics* Dover.
 Howard, E., 1990 *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders.
 Loria G., *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Ist. Ed. Cisalpino Goliardica (ristampa anastatica Manuali Hoepli), Modena, 1987.
 Loria G., *Storia delle matematiche*, Hoepli, Milano, 1950.
 Russo L., 2003, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli.
 van der Waerden, B. L., 1983, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer.

Bruno Jannamorelli